153

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On note u un élément de $\mathcal{L}(E)$.

I. POLYNÔMES D'ENDOMORPHISME

1. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

déf 1. L'application $ev_u \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array}\right.$ est le morphisme d'évaluation en u.
Son image est notée $\mathbb{K}[u]$ et s'appelle l'algèbre des polynômes en u.

prop 2. $(\mathbb{K}[u], +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

prop 3. $\mathrm{Ker}(ev_u) \neq \{0\}$. C'est un idéal non-nul de $\mathbb{K}[X]$, donc il admet un unique générateur unitaire.

déf 4. Ce générateur s'appelle le polynôme minimal de u, et est noté π_u.

rq 5. $\dim(E) < +\infty \Rightarrow$ tout $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme minimal.
C'est faux si $\dim(E) = +\infty$.

ex 6. * Si u est une homothétie de rapport λ, alors $\pi_u = X - \lambda$.
* Si u est nilpotent, alors $\exists k \in \mathbb{N}$, $\pi_u = X^k$.

C-ex 7. La dérivation $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}\right.$ n'a pas de polynôme minimal. Mais sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ admet X^{n+1} pour polynôme minimal.

prop 8. $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\pi_u)$ (isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres)
$\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$ (dimension en tant que $\mathbb{K}$-ev).

prop 9. Propriétés de l'anneau $\mathbb{K}[u]$.
* $\mathbb{K}[u]^\times = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \wedge \pi_u = 1\}$
* $\mathbb{K}[u]$ est un corps $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}[u]$ est intègre $\Leftrightarrow$ π_u est irréductible.
* Les idéaux de $\mathbb{K}[u]$ sont de la forme $\langle P(u) \rangle$ avec $P \mid \pi_u$.
* Les nilpotents de $\mathbb{K}[u]$ sont les $P(u)$ tels que $\exists m \in \mathbb{N}$, $\pi_u \mid P^m$, i.e. les facteurs irréductibles de π_u sont des facteurs irréductibles de P.
* Les idempotents de $\mathbb{K}[u]$ sont les $P(u)$ tels que $\pi_u \mid P(P-1)$.

appli 10. * Si $u \in GL(E)$, alors $\pi_u(0) \neq 0$ et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
* $\exp(u) \in \mathbb{K}[u]$.

rq 11. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\mathbb{K}[A]$ et π_A de la même façon.

ex 12. Soit $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ sa matrice compagnon.
Alors $\pi_{C_P} = P$.

prop 13. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors $\pi_A = \pi_{A'} = \pi_u$.

2. Lemme des noyaux et réduction

lemme 14 (lemme des noyaux). Soit $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux, et $P = P_1 \cdots P_r$. Alors : $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

rq 15. Si $P(u) = 0$, on obtient une décomposition de E en somme directe.

théo 16. u diagonalisable $\Leftrightarrow$ u admet un polynôme annulateur simplement scindé
$\Leftrightarrow$ π_u est simplement scindé.

ex 17. * Les projecteurs et symétries sont diagonalisables
* Un endomorphisme nilpotent non-nul n'est pas diagonalisable
* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

ex 18. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\exists p \in \mathbb{N}^*$, A^p est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.

appli 19. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{array}\right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{array}\right.$.
Alors $u_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$ et $v_n = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n$.

prop 20. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, alors : u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $u^q = u$.

3. Endomorphismes cycliques et réduction de Frobenius.

déf 21. u est cyclique si $\exists x \in E$, $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

prop 22. u cyclique $\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice compagnon
$\Leftrightarrow$ $\deg(\pi_u) = \dim(E) = n$.

théo 23 (Invariants de similitude). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $F_1, \dots, F_r$ des sev de E stables par u tels que :
(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ (ii) $u_i = u_{|F_i}$ est cyclique (iii) $P_{i+1} = \pi_{u_{i+1}} \mid \pi_{u_i} = P_i$.
La suite $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ ne dépend que de u et pas de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude.

Théo 24 (Frobenius). Soit $(P_i)_{1\le i\le n}$ les invariants de similitude de u. Alors $\exists\, \mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{C_{P_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{C_{P_n}} \end{pmatrix}$

Cor 25. Deux endomorphismes sont semblables $\Leftrightarrow$ ils ont les mêmes invariants de similitude.

appli 26. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

appli 27. Il y a 8 classes de conjugaison dans $GL_2(\mathbb{F}_3)$.

II. ÉLÉMENTS PROPRES.

1. Polynôme caractéristique et spectre

déf 28. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = \det(X\,id - u)$.

ex 29. * u nilpotent $\Rightarrow \chi_u = X^n$
* u cyclique $\Leftrightarrow \chi_u = \pi_u$.

appli 30 (Borne de Cauchy) Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors $|\lambda| \le \max(|a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}|)$.

théo 31. (Cayley-Hamilton) π_u divise χ_u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

déf 32. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u si $u - \lambda\, id$ n'est pas injectif. On note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. Pour $\lambda \in Sp(u)$, les éléments non-nuls de l'espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id)$ sont appelés vecteurs propres.

prop 33. $Sp(u) = \mathrm{Rac}(\chi_u) = \mathrm{Rac}(\pi_u)$.

déf 34. Soit $\lambda \in Sp(u)$. On appelle multiplicité
- algébrique, notée $m_a(\lambda)$, la multiplicité de λ comme racine de χ_u.
- géométrique, notée $m_g(\lambda)$, la dimension de E_λ.

prop 35. Pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$.

appli 36. Si $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}((u - \lambda_i\, id)^{m_i})$. On appelle sous-espaces caractéristiques les $\mathrm{Ker}((u - \lambda_i\, id)^{m_i})$

rq 37. Si u et v commutent, les sous-espaces propres et caractéristiques de u sont stables par v.

2. Critères de réduction

prop 38. u diagonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$
$\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$.

Dans ce cas, on a $u = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda$ où p_λ est la projection sur E_λ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \ne \lambda} E_\mu$.

ex 39. Soit $A = \begin{pmatrix} (0) & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. On a $\chi_A = (X-i)^2(X+i)^2$ est scindé, et $m_a(i) = m_g(i) = 2$, $m_a(-i) = m_g(-i) = 2$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

prop 40. * $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: u diagonalisable $\Leftrightarrow u^2$ diagonalisable et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: u diagonalisable $\Leftrightarrow u^2$ diagonalisable, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ et $Sp(u^2) \subset \mathbb{R}_+$.

prop 41. u trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé

rq 42. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

appli 43. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)) \in \mathbb{C}^*$.

appli 44. * Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ sa classe de conjugaison est fermée.

3. Réduction de Jordan.

déf 45. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ le bloc de Jordan de taille k associé à λ. On note $J_k = J_k(0)$.

théo 46 (Jordan nilpotent). Soit u nilpotent. Il existe $\mathcal{B}$ une base de E et des entiers $m_1 \ge \dots \ge m_n$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{J_{m_n}} \end{pmatrix}$.

théo 47 (Jordan). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$: $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des entiers $m_{i,1} \ge \dots \ge m_{i,d_i}$ tels que :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) \\ (0) & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$ avec $A_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_{i,1}}(\lambda)} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{J_{m_{i,d_i}}(\lambda)} \end{pmatrix}$.

prop 48. * $m_a(\lambda_i)$ est la taille de A_i
* $m_g(\lambda_i) = d_i$ est le nombre de blocs associés à λ_i.

prop 49. $\exp(tJ_k(\lambda)) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$

appli 50. Soit $Y' = AY$ un système différentiel, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\Pi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$. Alors les solutions sont de la forme $t \mapsto \sum_{i=1}^{r} P_i(t) e^{\lambda_i t}$ avec $\deg(P_i) \leq m_i - 1$.

ex 51. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors la forme de Jordan de A est $\begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & 4 & 1 \\ & & 4 \end{pmatrix}$. Les solutions de $Y' = AY$ sont des combinaisons linéaires de e^{2t}, e^{4t}, te^{4t}.

rq 52. La connaissance des invariants de similitude permet de trouver la forme de Jordan. Par exemple, si $P_1 = X-3$ et $P_2 = (X-3)^2(X+2)^2$, la forme de Jordan est : $\begin{pmatrix} \boxed{3} & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & -2 & 1 \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$.

III. D'AUTRES FAÇONS DE RÉDUIRE

1. Co-réduction

prop 53. Soit $(u_i)_{i\in I}$ des endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux. Alors ils sont co-diagonalisables.

ex 54. Les matrices circulantes sont co-diagonalisables.

appli 55. Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, alors : $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K}) \Leftrightarrow n = m$.

appli 56. Soit $\mathbb{K}$ algébriquement clos et G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$. Si $|G| \wedge \mathrm{car}(\mathbb{K}) = 1$, alors G est co-diagonalisable.

appli 57. Les représentations (complexes) irréductibles d'un groupe abélien fini sont de degré 1.

prop 58. Soit $(u_i)_{i\in I}$ des endomorphismes trigonalisables et commutant deux à deux. Alors ils sont co-trigonalisables.

DEV.1

théo 59 (Lie-Kolchin). Un sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est co-trigonalisable.

rq 60. Ce théorème généralise la proposition précédente.

2. Décomposition de Dunford

théo 61 (Dunford). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que $u = d + n$, avec :

(i) d diagonalisable dans une extension $\mathbb{L}|\mathbb{K}$ (ii) n nilpotent

(iii) d et n commutent.

De plus, $d, n \in \mathbb{K}[u]$.

DEV.2

prop 62 (méthode de Newton). On suppose $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$. On pose $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1}$. Alors la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire à D, où $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A.

prop 63. Si $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \equiv \lambda_i \, [(X-\lambda_i)^{m_i}]$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors $u = P(u) + (u - P(u))$ est la décomposition de Dunford de u.

ex 64. La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

appli 65. Soit $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors :

$P(u)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \forall k \in [\![1, m_i - 1]\!], P^{(k)}(\lambda_i) = 0$.

appli 66. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Alors $e^A = e^D e^N$.

appli 67. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Sp(A) \subset \{Re(z) < 0\}$. Alors :

$$\exists a > 0, \exists K > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \|e^{tA}\| \leq K e^{-at}.$$

appli 68. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.