Leçon 154. Sous espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

1/15

Cadre : Dans tout l'exposé, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On notera μ_u le polynôme minimal de u et χ_u son polynôme caractéristique.

I - Généralités :

1) Premières définitions. [OA]

Def 1 : F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex 2 : * $\{0\}$ et E sont des sous espaces stables triviaux.
* $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont u-stables, et $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ aussi. En particulier, on a les sous espaces propres et caractéristiques.

Prop 3 : Si $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont u-stables.

Rem 4 : En particulier, les sous espaces propres et caractéristiques de v sont u-stables.

App 5 : Nécessaire pour la co-réduction.

Prop 6 : * Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u admet une droite stable.
* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, u admet une droite ou un plan stable.
* Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on peut avoir des sous-espaces stables de dimension minimale arbitrairement grande.

Ex 7 : Soit $1 \leq k < \dim(E)$. [X-ENS 1]
u stabilise tous les sous espaces de dimension k $\Leftrightarrow$ u est une homothétie.

2) Endomorphismes induits / Caractérisation matricielle [OA]

Prop 8 : Si F est u-stable, alors

$u|_F \in \mathcal{L}(F)$ et $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u|_F"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u"] & E/F \arrow[d, "\bar{u}"] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & E/F \end{tikzcd}$$

Prop 9 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u|_F)$, $C = \mathrm{Mat}_{\pi(\mathcal{B}')}(\bar{u})$

Ainsi, $\chi_u = \chi_{u|_F} \cdot \chi_{\bar{u}}$.

Réciproquement, toute matrice triangulaire par blocs fournit un sous espace stable non trivial.

App 10 : χ_u irréductible $\Leftrightarrow$ u n'admet pas de sous espace stable non trivial.

Ex 11 : $E_\lambda(u)$ est le plus grand sous espace stable par u tel que l'endomorphisme induit soit $\lambda \cdot id_E$.

3) Dualité. [Gou]

Déf 12 : On définit ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$ par ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$, et $F^\circ = \{\varphi \in E^* \,/\, \varphi(F) = 0\}$.

Prop 13 : F est u-stable $\Leftrightarrow$ F° est ${}^t u$-stable.

Cor 14 : Si E est Euclidien, on a
F est u-stable $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est u^*-stable.

App 15 : Réduction des endomorphismes normaux.

II - Application à la réduction.

1) Par blocs [Gob] / [Gou]

Prop 16 : Trigonalisation par blocs.
Si $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_p = E$ est une suite croissante de sous espaces stables, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, où E_i est un supplémentaire de F_{i-1} dans F_i. Et si $\mathcal{B}$ est une base adaptée,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

Prop 17: Diagonalisation par blocs.
Si $E = \bigoplus_{i=1} E_i$, où E_i est u-stable, alors, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \square & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \square \end{pmatrix}$$

Thm 18: (Décomposition des noyaux)
Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ où les P_i sont premiers entre eux, alors
$\mathrm{Ker}\, P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

App 19: Si $\chi_u = \prod (X-\lambda_i)^{m_i}$ est scindé,
$E = \bigoplus \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)^{m_i}$,
appelés espaces caractéristiques, u-stables, $\dim = m_i$.
Donc χ_u scindé $\Rightarrow$ u diagonalisable par blocs.

App 20: Tout sous espace stable F s'écrit
$F = \bigoplus (F \cap \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)^{m_i})$

2) Diagonalisation, Trigonalisation. [Gou][Gob]

Def 21: On appelle drapeau complet une suite $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$ de sous espaces vectoriels tels que $\forall i$ $\dim F_i = i$.
On dira qu'il est u-stable, si $\forall i$, F_i l'est.

Prop 22: u trigonalisable
$\Leftrightarrow$ il existe un drapeau complet u-stable
$\Leftrightarrow$ χ_u est scindé.

Ex 23: Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable.

Prop 24: u diagonalisable
$\Leftrightarrow$ il existe n droites indépendantes u-stables
$\Leftrightarrow$ χ_u est scindé, et les valeurs propres sont non défectives.

App 25: Si u diagonalisable (resp trigonalisable) et F est u-stable, alors $u|_F$ est diagonalisable (resp trigonalisable).

Cor 26: Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent et sont diagonalisables (resp trig.), alors ils le sont dans une base commune.
De plus, dans le cas diagonalisable, on a une réciproque.

App 27 Démonstration du thm Lie Kolchin.

Thm 28 (Lie Kolchin)
Tout sous groupe G connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable. [Dev]

Ex 29: Si car $\mathbb{K} \neq 2$,
$GL_m(\mathbb{K}) \simeq GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow m = n$.

3) Décomposition de Dunford.

Thm 30: Si χ_u scindé, $\exists! (d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d+n$ avec d diagonalisable et n nilpotent, avec $d \circ n = n \circ d$. De plus, d et n sont des polynômes en u.

App 31: On obtient une base $\mathcal{B}$ où u est diagonal par blocs et triangulaire.

App 32: u est diagonalisable
$\Leftrightarrow$ $\exp(u)$ est diagonalisable.

III - Endomorphismes remarquables.

1) Endomorphismes cycliques. [Gou]

Def 33 : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $\mathrm{Vect}\,(u^k(x))_{k=0}^{n-1} = E$.

Prop 34 : Soit u cyclique et $\mu_u = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors il existe une base B de E telle que
$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
Matrice compagnon associée à μ_u, $C(\mu_u)$

Thm 35 : (Frobenius) $\exists F_1, \dots, F_r$ sous espaces stables de E tels que
i) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ ii) $\forall i$, $u|_{F_i}$ est cyclique
iii) si $P_i = \mu_{u|_{F_i}}$ alors P_{i+1} / P_i $\forall i$.
De plus, la suite P_i ne dépend pas des F_i.
Matriciellement, si B est une base adaptée,
$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

App 36 : * u, v semblables $\Leftrightarrow$ ils ont les mêmes P_i.
* Jordan pour les nilpotents.

2) Endomorphismes semi simples. [OA]

Def 37 : On dit que u est semi simple si $\forall F$ u-stable, il admet un supplémentaire u-stable.

Ex 38 : diagonalisable $\Rightarrow$ semi simple.

Prop 39 : u semi simple $\Leftrightarrow \mu_u = \prod Q_i$, unitaires, irréductibles distincts.

App 40 : * Si $\mathbb{K}$ alg clos, semi simple $\Leftrightarrow$ diagonalisable.
* Semi simple + nilpotent $\Rightarrow$ nul
* u - semi simple $\Rightarrow$ $u|_F$ et $\bar{u}$ aussi, mais pas $\Leftarrow$.

3) Endomorphismes normaux. [Gou]

Def 41 : On dit que u est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Prop 42 : u normal se diagonalise en base orthonormale, sur un corps alg clos

Thm 43 : Si E euclidien, il existe une base orthonormale B telle que [Dev]
$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$\lambda_i \in \mathbb{R}$

IV - Applications aux représentations linéaires. [Rauch]

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dim n et G groupe fini.

Def 44 : Une représentation linéaire est un homomorphisme $\rho : G \to GL(V)$.
Son degré est la dimension de V.

Ex 45 : * Tout morphisme $G \to \mathbb{C}^*$ est une représentation linéaire de degré 1.

Def 46 : Soit $W \subset V$ sous espace vectoriel stable par $\{\rho(g) \,/\, g \in G\}$. On a une sous représentation $\rho_W : G \to GL(W)$.

Def 47 : On dit qu'une représentation est irréductible si elle n'admet pas de sous représentations non triviales.

Ex 48 : Les représentations de degré 1 sont irréductibles.

Lem 49 : Tout sous espace stable d'une représentation admet un supplémentaire stable.

Thm 50 : (Maschke) [Dev]
Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

On aurait aussi pu parler de :
- Codes correcteurs cycliques

Développements possibles
- Codes cycliques
- Endomorphismes semi simples
- Théorème de Frobenius

Références :

[OA] : Objectif Agreg
[Gou] : Gourdon, Algèbre
[Gob] : Goblot, Algèbre Linéaire
[Rauch] : Rauch, Les groupes finis et leurs représentations