154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E. On note $\begin{cases} \mu_u \text{ le polynôme minimal de } u \\ \chi_u \text{ son polynôme caractéristique.} \end{cases}$ $(\dim E = n)$

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES SOUS ESPACES STABLES

1. Définitions – premières propriétés. [OA]

Def 1. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex 2. * $\{0\}$ et E : sous-espaces stables triviaux

* $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont u-stables. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u))$ sont aussi u-stables. En particulier, les sous-espaces propres et caractéristiques de u sont u-stables.

* Sous-espaces stables d'une projection sur une droite dans $\mathbb{R}^2$? cf Fig 1.

Prop 3 Si $v \in L(E)$ est tel que $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ et $\operatorname{im} v$ sont u-stables.

Rq 4. * Puisque $u \circ u = u \circ u$, on retrouve que les sous espaces propres et caractéristiques de u sont u-stables.

* la prop 3 est nécessaire pour coréduire.

Prop 5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u admet une droite stable

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors u admet une droite ou un plan stable.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on peut avoir des sous espaces stables de dimension minimale arbitrairement grande (cf prop 11)

Ex 6 Si $1 \leq k < \dim E$, alors u est une homothétie $\iff$ u laisse stable tous les sous espaces de dimension k de E. [XENS]

2. Endomorphismes induits et bases adaptées [OA]

Prop 7. La stabilité de F par u donne naissance à deux endomorphismes : $u_{|F} \in L(F)$ et $\bar{u} \in L(E/F)$.

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & E/F \\ \downarrow u_{|F} & & \downarrow u & & \downarrow \bar{u} \\ F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & E/F \end{array}$$

Quelles sont les propriétés de u dont héritent $u_{|F}$ et $\bar{u}$?

Prop 8. Supposons F de dimension r, $\underbrace{(e_1, \dots, e_r)}_{\mathcal{B}_F}$ une base de F que l'on complète en une base $\underbrace{(e_1, \dots, e_n)}_{\mathcal{B}}$ de E où $\dim E = n$ (base adaptée).

Notons $\mathcal{B}'$ le complémentaire de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}$.

Alors, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ où $\begin{cases} A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) \\ \mathcal{B} = \mathcal{M}_{\pi(\mathcal{B}')}(\bar{u}) \end{cases}$ $\pi(\mathcal{B}')$ c'est une base de E/F.

et $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \cdot \chi_{\bar{u}}$.

Rq 9. Si $C = 0$, $G := \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est aussi stable par u et on obtient une décomposition de $E = F \oplus G$ en sous-espaces supplémentaires stables.

Ex 10 Soit p la projection de Fig 1, d un vecteur unitaire dirigeant $(\mathcal{D})$, alors $\mathcal{M}_{(d, \vec{e_1})}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

Prop 11. * u nilpotent $\iff$ $u_{|F}$ et $\bar{u}$ nilpotents, mais $u_{|F}$ et $\bar{u}$ nuls $\not\Rightarrow$ u nul.

* χ_u irréductible $\iff$ u n'admet pas de sous espace non trivial. (cf prop 6)

App 12. Equation de Hill Mathieu [ZQ]

3. Applications de la dualité.

Rappel 13. $\begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & E^* \\ f & \longmapsto & f \circ u \end{array}$ est appelée application transposée de u et notée ${}^t u$.

On note $F^\perp = \{f \in E^*, \forall x \in F, f(x) = 0\}$. [GOU]

Prop 14. F est stable par u $\iff$ $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Prop 15 Si E est euclidien ou hermitien,

F est u-stable $\iff$ $F^\perp$ est u^*-stable.

Rq 16. Pour certaines démonstrations par récurrence sur la dimension, ces résultats permettent de diminuer la dimension de l'espace pour appliquer l'hypothèse de récurrence.

Cor 17. Si H est un hyperplan de E, alors H est stable par f $\iff$ $H^\perp$ est une droite propre de ${}^t f$.

App 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé, les sous-espaces stables par f sont $\{0\}$, $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$ et $\mathbb{R}^3$. [MAD]

II. APPLICATION A LA REDUCTION

But : représentation matricielle simple de u.

1. Triangulation et diagonalisation par blocs [GOB]

<u>Prop 19</u>. Soit $\{0\}=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_k=E$ une suite croissante de sous-espaces stables. On pose $E_1=F_1$ et, pour $i\geq 2$, soit E_i un supplémentaire de F_{i-1} dans F_i. Alors $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ et si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \square & & & * \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \square \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, toute représentation matricielle de telle sorte correspond à une suite de sous-espaces stables.

<u>Prop 20</u>. La représentation matricielle de $u\in L(E)$ relativement à une décomposition $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ est diagonale par blocs $\iff$ chacun des E_k est stable par u.

<u>Prop 21</u> [Lemme des Noyaux]. Soit $P=Q_1\cdots Q_n$ un polynôme annulateur de u, où les Q_i sont premiers entre eux deux à deux. Alors, $E=\bigoplus_{i=1}^{n}\ker Q_i(u)$. [GOU]

<u>Rq 22</u>. Chaque $\ker Q_i(u)$ étant u-stable, u est diagonalisable par blocs.

<u>Prop 23</u>. Dans le cadre de la prop 21 (lemme des noyaux) on a : $F=\bigoplus_{i=1}^{n}(F\cap\ker Q_i(u))$

<u>Ex 24</u>. L'endomorphisme canoniquement associé à

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

possède exactement 9 sous-espaces stables. [OA]

2. Diagonalisation et trigonalisation. [GOU]

<u>Def 25</u>. On appelle drapeau complet une suite $\{0\}=F_0\subsetneq F_1\subsetneq\cdots\subsetneq F_n=E$ de sous-espaces vectoriels de sorte que $\dim F_i=i$ ($i\in[\![1,n]\!]$). On dira qu'il est u-stable si, $\forall i$, F_i l'est.

<u>Prop 26</u>. u trigonalisable $\iff$ il existe un drapeau complet u-stable $\iff$ χ_u est scindé.

<u>Rq 27</u>. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est toujours trigonalisable.

<u>Prop 28</u>. u diagonalisable $\iff$ il existe n droites indépendantes u-stables $\iff$ χ_u est scindé et les valeurs propres de u sont non défectives.

<u>App 29</u> [Théorème de Burnside] Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini. [XENS]

<u>Prop 30</u>. La restriction d'un endomorphisme diagonalisable (resp. trigonalisable) à un sous-espace stable est diagonalisable (resp. trigonalisable). [GOU]

<u>Cor 31</u> [Co-réduction] Si $u,v\in L(E)$ commutent et sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors ils le sont dans une base commune.

<u>Ex 32</u>. Si car $\mathbb{K}\neq 2$, $GL_m(\mathbb{K})\cong GL_n(\mathbb{K})\iff m=n$.

[DEV 1] **Théorème de Lie-Kolchin**. Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles. [CB]

3. Décomposition de Dunford.

<u>Thm 33</u>. Si χ_u est scindé, il existe un unique couple $(d,n)\in L(E)^2$ où d est diagonalisable, n est nilpotent avec $dn=nd$. De plus, d et n sont des polynômes en u. [GOU]

<u>Rq 34</u>. Il existe un algorithme effectif de calcul de d qui ne nécessite pas le calcul des valeurs propres de u.

<u>App 35</u>. u est diagonalisable $\iff \exp(u)$ diagonalisable.

III. ENDOMORPHISMES REMARQUABLES

1. Endomorphismes cycliques - Réduction de Frobenius.

<u>Def 36</u> On dit que u est cyclique s'il existe $x\in E$ de sorte que $(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

<u>Def 37</u>. Soit $P=X^p+a_{p-1}X^{p-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice [GOU]

$$\mathcal{C}(P)=\begin{pmatrix}0 & & (0) & 0 & -a_0\\ 1 & \ddots & & & -a_1\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & 0 & -a_{p-2}\\ (0) & & & 1 & -a_{p-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Prop 38 Supposons u cyclique, posons $\mu_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Alors, il existe une base de E pour laquelle

$$\mathcal{M}_B(u) = \mathcal{C}(\mu_u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Thm 39 [Réduction de Frobenius] Il existe une suite $F_1, F_2, \dots, F_r$ de sous-espaces u-stables tels que

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ (ii) $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $u_{|F_i}$ est cyclique

(iii) Si $P_i = \mu_{u_{|F_i}}$, $P_{i+1} \mid P_i$ si $i \in [\![1, r-1]\!]$.

La suite $(P_i)_i$ ne dépend que de u. Matriciellement, si B est une base adaptée à la décomposition (i),

$$\mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$ avec $P_1 = \mu_u$, $P_1 \cdots P_r = \chi_u$ à $(-1)^n$ près.

App 40 * Réduction de Jordan pour les nilpotents

* u, v semblables $\Leftrightarrow$ ils ont les mêmes P_i.

2. Endomorphismes semi-simples. [OA]

Def 41. On dit que u est semi-simple si, pour tout sous espace F de E stable par u, il existe un supplémentaire de F u-stable.

Ex 42. Un endomorphisme diagonalisable est toujours semi-simple.

Prop 43 [Caractérisation] u semi simple $\Leftrightarrow$ $\mu_u = Q_1 \cdots Q_r$ où les Q_i sont irréductibles unitaires distincts deux à deux.

App 44 * un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais semi-simple.

* u semi simple $\Rightarrow$ $u_{|F}$ et $\bar{u}$ semi simples si F est u-stable. La réciproque est fausse.

* Dunford généralisé !

3. Endomorphismes normaux. ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) [GOU]

Def 45. On dit que u est normal si $uu^* = u^*u$.

Prop 46. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) u est normal (ii) u se diagonalise en base orthonormale

(iii) u et u^* sont codiagonalisables en base orthonormale.

Th 47 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Si E est euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ tel que [DEV 2]

$$\mathcal{M}_B(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{bmatrix}$$ où les λ_i sont réels, les $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

IV. THEORIE DES REPRESENTATIONS [SER]

Soit G un groupe fini, V un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dim $< +\infty$.

Def 48. Une représentation linéaire de G dans V est un homomorphisme $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. Son degré est la dimension de V.

Ex 49. La représentation triviale $\rho : g \in G \longmapsto 1 \in \mathbb{C}^*$ de degré 1.

Def 40. Soit W un sous espace vectoriel de V. Supposons que, si $g \in G$, $\rho(g)(W) \subset W$, ceci induit une sous représentation : $\rho|_W : G \longrightarrow GL(W)$, $g \longmapsto \rho(g)|_W$.

Def 41. On dit qu'une représentation est irréductible si elle n'admet pas de sous représentation non triviale.

Ex 42. • Les représentations de degré 1 sont irréductibles

• Exemple d'une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$, cf Fig 2.

Prop 43. Soit W une sous représentation de V, alors il existe un supplémentaire $\widetilde{W}$ de W dans V stable par l'action de G.

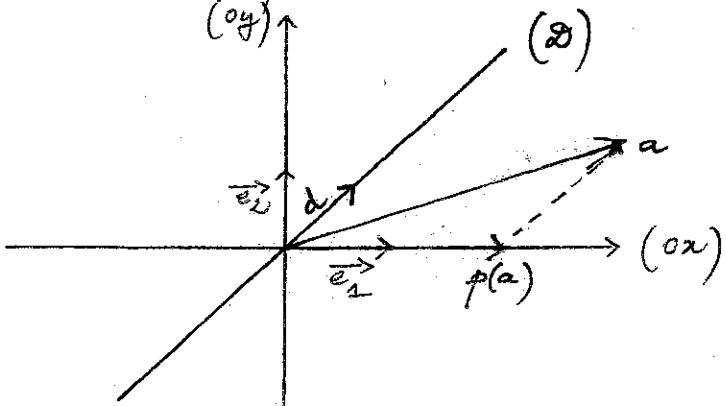
Thm 44. [Maschke] Toute représentation linéaire d'un groupe fini est somme directe de représentations irréductibles.

Rq 45. (ADMIS). Le théorème de Maschke est porté en défaut si le groupe G n'est plus supposé fini (Conséquence du théorème de Lie Kolchin) !

Rq 46. Les résultats d'admissibilité c'est ce soir à 00h00.

ANNEXE

Figure 1. On définit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la projection sur (Ox) parallèlement à la première bissectrice notée $(\mathcal{D})$:



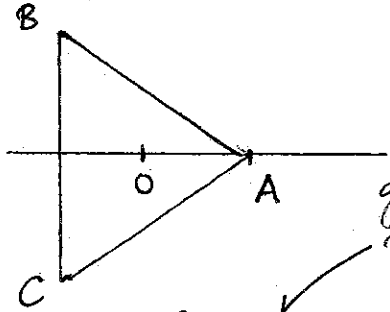
Sous espaces stables de dimension 0 : $\{0\}$
" " " " 2 : $\mathbb{R}^2$

Sous espaces stables de dimension 1 ?

On a déjà : $\ker p = (\mathcal{D})$, $\operatorname{im} p = (Ox)$ et si $a \notin (Ox) \cap (\mathcal{D})$, $p(\mathbb{R}a) = (Ox) \not\subset \mathbb{R}a$, donc $\mathbb{R}a$ non stable.

Figure 2

Soit $\Delta = ABC$ le triangle équilatéral direct :



On note $Is(\Delta)$ le groupe d'isométries du triangle.

rotation de centre O, d'angle $2\pi/3$

symétrie d'axe (OA)

$Is(T) = \{Id, r_{\frac{2\pi}{3}}, r_{4\pi/3}, s_A, s_B, s_C\}$ et

$$\Phi : Is(\Delta) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{S}_3 \quad [MER]$$
$$f \longmapsto \begin{pmatrix} A & B & C \\ f(A) & f(B) & f(C) \end{pmatrix}$$

$$\varphi : Is(\Delta) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$
$$f \longmapsto f$$

et $\rho : \varphi \circ \Phi^{-1} : S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est une représentation, irréductible car toute droite stable serait stable par toutes les rotations et toutes les symétries.

Références.

[GOU] Gourdon, Algèbre

[GOB] Goblot, Algèbre linéaire

[OA] Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation

[MAD] Madère, Préparation à l'oral de l'agrégation, leçons d'algèbre

[XENS1] Francinou - Gianella, Oraux X-ENS Algèbre 1

[MER] Mercier, Cours de géométrie, Préparation au CAPES et à l'agrégation.

[CB] Chambert-Loir, Algèbre corporelle

[ZQ] Zuily Queffélec, Elements d'analyse pour l'agrégation.

[SER] J-P Serre, Représentation linéaire des groupes finis.