126 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

[GOU, p161]

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

I Définitions et premières propriétés.

1) valeur propre et sous espace propre.

<u>def 1</u> : α est valeur propre de f si $f-\alpha Id_E$ est <u>non</u> injective ie : s'il existe $x\neq 0$ tel que $f(x)=\alpha x$ et on dit alors que x est vecteur propre de f attaché à la valeur propre α.

<u>def 2</u> : On appelle spectre de f : $Sp(f)=\{\alpha \mid \alpha \text{ est vp}\}$

<u>Rmq 3</u> : Ainsi les vecteurs propres de f sont :
(i) soit les vecteurs du noyau
(ii) soit les vecteurs qui ne changent pas de direction sous l'action de f.

[GRI, p198]

<u>ex 4</u> : $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, rotation d'angle θ et de centre O si $\theta\notin \mathbb{Z}\pi$ il n'y a pas de $\vec{vp}$ et donc pas de vp.

<u>def 5</u> : Soit $\lambda\in Sp(f)$. Le sous espace propre de f associé à la vp λ est : $E_\lambda=\{x\in E \mid f(x)=\lambda x\}=\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)$ et il est stable par f.

<u>Thm 6</u> : Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in Sp(f)$ 2 à 2 distinctes. Alors les ss espaces propres $E_{\lambda_1},\dots,E_{\lambda_m}$ sont en somme directe.

[GOU, p174]

2) Polynômes d'endomorphismes et idéal annulateur.

<u>def 7</u> : Soit $P=a_0+a_1X+\dots+a_pX^p\in\mathbb{K}[X]$
$\forall f\in\mathcal{L}(E)$ on note $P(f)=a_0Id_E+a_1f+\dots+a_pf^p\in\mathcal{L}(E)$
$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ " $P(A)=a_0I_n+a_1A+\dots+a_pA^p\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

<u>Rmq 8</u> : si $f\in\mathcal{L}(E)$, $\{P(f) \mid P\in\mathbb{K}[X]\}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

<u>Prop 9</u> : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in\mathbb{K}[X]$ tq $P(f)=0$.
Si $\lambda\in Sp(f)$ alors $P(\lambda)=0$.

<u>def 10</u> : $I=\{P\in\mathbb{K}[X] \mid P(f)=0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui est principal donc $\exists! P\in\mathbb{K}[X]$ tq $I=(P)$; on le note π_f et on l'appelle polynôme minimal de f.

<u>Prop 11</u> : si $Q(f)=0$ alors $\pi_f\mid Q$.

<u>Prop 12</u> : $\lambda\in Sp(f)\Longleftrightarrow \pi_f(\lambda)=0$

<u>Thm 13</u> : (décomposition des noyaux). Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $P=P_1\dots P_k\in\mathbb{K}[X]$ les polynômes P_i étant premiers entre eux 2 à 2 alors :
$\mathrm{Ker}\,P(f)=\mathrm{Ker}\,P_1(f)\oplus\dots\oplus\mathrm{Ker}\,P_k(f)$.
(reste vrai en dim infinie).

[GOU, p162]

3-) Polynôme caractéristique.

<u>def 14</u> : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P_A(X)=\det(A-XI_n)\in\mathbb{K}[X]$ est le polynôme caractéristique de A.

<u>Rmq 15</u> : le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base

<u>Ex 16</u> $f:\mathbb{R}^2\xrightarrow{A}\mathbb{R}^2$ avec $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$
$P_f(X)=P_A(X)=(X-2)(X-3)$.

<u>Prop 17</u> : $\lambda\in Sp(f)\Longleftrightarrow P_f(\lambda)=0$.
(de même pour les matrices)

<u>Ex 17</u> donc dans l'ex 16, f a pour vp 2 et 3.

<u>Prop 18</u> : F un s.e.v. strict de E stable par f. Soit $g=f_{|F}$ la restriction de f à F. Alors $g\in\mathcal{L}(F)$ et P_g divise P_f.

<u>Thm 19</u> : (Cayley Hamilton). Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, P_f son polynôme caractéristique. Alors $P_f(f)=0$.

[GOU, p163]

II

1) définition et premiers exemples.

<u>def 20</u> : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f. On dit que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

<u>Rmq 21</u> : f est diagonalisable ssi sa matrice dans une base quelconque de E est diagonalisable.

<u>Ex 22</u> : reprenons l'ex 16.
$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ où $P=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$.

[GOU]

2-) Critères de diagonalisabilité.

<u>Prop 23</u> : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Si P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, alors f est diagonalisable.

<u>Ex 24</u> : $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$.

<u>Prop 25</u> : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, $\lambda\in\mathbb{K}$ une racine de P_f d'ordre de multiplicité k. Alors : $\dim E_\lambda\leq k$.

<u>Prop 26</u> : Soit f diagonalisable et F un sev de E stable par f. Alors $f_{|F}\in\mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

Thm 27 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in Sp(f)$.
Alors on a équivalence entre :
(i) f est diagonalisable
(ii) E est somme directe des espaces propres : $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
(iii) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$.

Cor 28 : Si f admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes alors f est diagonalisable.

Thm 29 (CNS 1) f est diagonalisable ssi :
(i) P_f est scindé dans $\mathbb{K}$ ie $P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$
et (ii) $\forall$ vp λ_i de multiplicité α_i on a $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$

Thm 30 (CNS 2) f est diagonalisable si et seulement si : il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ ayant toutes ses racines simples tel que $P(f) = 0$.

3) diagonalisabilité et puissances.

[X-ENS, p90]

Thm 31 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p soit diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Rmq 32 : si A n'est pas inversible cela n'est pas vrai.

ex 33 : A nilpotente !

Thm 34 : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

Thm 35 : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, f^2 diagonalisable :
f diagonalisable $\Leftrightarrow (\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $Sp f^2 \subset \mathbb{R}_+)$

4) Conséquences topologiques.

[O-A p179 + GOU p185]

Thm 36 : L'ensemble des matrices diagonalisables inversibles engendre tout le groupe $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 37 : l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (noté $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$) est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Rmq 38 : le résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Thm 38 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable, alors A est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Appl 39 de $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto D$ la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford.

Alors si $n \geq 2$, l'application φ n'est pas continue.

II.I Propriétés et applications. $(\cdot,\cdot)$ ps et $\|\cdot\|$ norme associée.

1°) Théorèmes spectraux.

[GOU p244]

a) endomorphismes autoadjoints

Def 40 : f et g sont adjoints si : $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x), y) \overset{(*)}{=} (x, g(y))$. À f fixé, il existe au plus un g vérifiant $(*)$. On le note f^*.

Def 41 : f est autoadjoint si $f^* = f$.

[DVPT1]

Théorème 42 : Soit E de dim finie, f autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f et de plus les vp de f sont réelles.

Traduction matricielle 43 : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique (ou hermitienne). Alors il existe C orthogonale (ou unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^tMC = D$ où D est diagonale réelle.

Cor 44 : Soit Φ une forme quadratique sur E, $\dim E < +\infty$. Alors il existe une base orthonormée de E, orthogonale pour Φ.

Cor 45 : Soient M et N symétriques (resp hermitiennes) telles que M soit définie positive. Alors il existe une matrice C inversible telle que $C^*MC = I_n$ et $C^*NC = D$

Appl 46 : Racine carrée d'une matrice H hermitienne positive : il existe une unique matrice R hermitienne positive telle que $H = R^2$.

Appl 47 : Décomposition polaire : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists ! (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times SDP_n(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$. [GOU p257]

b) Endomorphisme unitaire :

Def 48 : ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) f est dit unitaire si $\|f(x)\| = \|x\|$.

Thm 49 : Soit E hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$ unitaire. Alors il existe une base orthonormale qui diagonalise f, et toutes les vp de f ont leur module égal à 1

Jury :

Prénom :

NOM :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Traduction matricielle 50 : Soit $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire. Alors il existe une matrice unitaire P telle que

$$P^{-1}UP = P^{*}UP = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Appl 51 : Réduction des isométries.

[GOU p 258] c) Endomorphismes normaux.

Def 52 : f est dit normal si f^{*} existe et $f\circ f^{*} = f^{*}\circ f$.

Thm 53 : ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim E < +\infty$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on a les équivalences suivantes :

(i) f est normal

(ii) f se diagonalise dans une base orthonormale de E

(iii) f et f^{*} se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

Rmq 54 : Faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Appl 55 : Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est normal $\Longleftrightarrow$ $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tq $u^{*} = P(u)$.

[GOU, p 166] 2) Diagonalisation simultanée.

Prop 56 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $f\circ g = g\circ f$. Alors :

(i) Tout ss espace propre de f est stable par g (en particulier $\ker f$)

(ii) $\mathrm{Im} f$ est stable par g

Thm 57 : (Diagonalisation simultanée) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base commune de diagonalisation de f et g (on dit alors que f et g sont codiagonalisables).

Appl 58 : Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$

$GL_n(\mathbb{K}) \overset{\text{groupe}}{\simeq} GL_m(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow n = m$

3-) Décomposition de Dunford.

[DVPT 2]

[GOU, p 194] Prop 59 : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit E un $\mathbb{K}$ev de dim finie $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors : il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq :

(i) d soit diagonalisable

(ii) n soit nilpotent

(iii) $f = d + n$

(iv) $n\circ d = d\circ n$

De plus d et n sont alors des polynômes en f.

Appl 60 : Calcul de l'exponentielle de f.

$$\exp(f) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i}\Big[\sum_{p=0}^{\nu_i - 1} \frac{(f - \lambda_i Id)^p}{p!}\Big] P_i$$

avec ν_i : indice de nilpotence de $(f_{|N_i} - \lambda_i Id_{N_i})$

Ex 61 : f annulé par $(X-1)(X-2)$

$\exp(f) = e^2\,(f - Id) - e^1\,(f - 2\,Id)$

IV Applications diverses.

[GRi, p 211]

1) Calcul de la puissance d'une matrice

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A diagonalisable, il existe A' une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$ ie $A = PA'P^{-1}$ donc :

$A^k = (PA'P^{-1})\dots(PA'P^{-1}) = P(A')^k P^{-1}$.

or si $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $(A')^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

d'où $A^k = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$.

ex 62 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^{k+1} - 2.3^k \\ -2^k + 3^k & -2^k + 2.3^k \end{pmatrix}$

2) Résolution d'un système de suites récurrentes.

on a : $\begin{cases} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 \end{cases}$ d'où $X_n = A^n X_0$.

ex 63 : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$

on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$:

$\begin{cases} u_n = 3.2^{n+1} - 4.3^n \\ v_n = -3.2^n + 4.3^n \end{cases}$

3) Système différentiel linéaire à coefficients constants

On met le système ss forme matricielle : $\frac{dX}{dt} = AX$, on résout :

a) On diagonalise A. Soit $A' = P^{-1}AP$ diagonale.

b) On intègre le système $\frac{dX'}{dt} = A'X'$.

c) On revient à X par $X = PX'$.

Références.

[GOU] : Xavier Gourdon, les maths en tête, Algèbre, $2^{\text{ème}}$ édition
[X-ENS] : Francinou - Gianella - Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 2
[O-A] : Beck - Malick - Peyré, Objectif Agrégation, $2^{\text{ème}}$ édition
[GRI] : Joseph Grifone, Algèbre linéaire.