155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Motivation. Il est plus facile d'étudier un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

E désigne un espace vectoriel de dimension $1 \leq n < +\infty$ sur un corps $\mathbb{K}$. On procèdera à l'identification $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Définitions

1) Éléments propres

Définition 1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$; l'élément x est un vecteur propre de u. On note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u et pour $\lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(u) := \mathrm{Ker}(u - \lambda id) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$ le sous-espace propre associé à u pour la valeur propre λ.

Proposition 2. Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u et sont en somme directe.

2) Diagonalisabilité

Définition 3. $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Remarque 4. Dans une telle base, la matrice de u est diagonale. Du point de vue matriciel, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi $\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

Exemple 5. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 2 ;
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ " " " " " 0.

Ainsi u est diagonalisable et $\mathrm{Mat}_{\left(\binom{1}{1},\binom{1}{-1}\right)}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 6. Peut-on savoir si un endomorphisme est diagonalisable sans forcément connaître ses éléments propres ?

II Critères de diagonalisabilité

1) Polynôme caractéristique

Définition 7. Le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ est défini par :

$$\chi_u(X) := \det(u - X id).$$

Proposition 8. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$: alors $\lambda \in Sp(u)$ ssi $\chi_u(\lambda) = 0$.

Corollaire 9. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors $Sp(u) \neq \emptyset$.

Exemple 10. Soit $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\chi_M = X^2 + 1$ donc $Sp_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$. En revanche, $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, +i\} \neq \emptyset$.

Proposition 11. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$ alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ où m_λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

2) Caractérisation avec les éléments propres

Proposition 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable ;

(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$;

(iii) $n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$;

(iv) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

Corollaire 13. Si u possède n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

3) Caractérisation avec des polynômes annulateurs

Lemme 14 (décomposition des noyaux). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Alors on a :

$$\mathrm{Ker}\,(PQ)(u) = \mathrm{Ker}\,P(u) \oplus \mathrm{Ker}\,Q(u).$$

Remarque 15. Le lemme s'étend à N polynômes deux à deux premiers entre eux.

Proposition 16. $u\in\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi u est annulé par un polynôme (non nul) scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire 17. Si $u\in\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et si F est un sous-espace de E stable par u alors $u|_F\in\mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Exemple 18. Si u est un projecteur, alors $u^2=u$ i.e. $u(u-1)=0$ donc u est diagonalisable. De même, en caractéristique différente de 2 les symétries sont diagonalisables.

Remarque 19. Si $|\mathbb{K}|=q<+\infty$ alors $u\in\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi $u^q=u$.

Définition 20. Le polynôme minimal de $u\in\mathcal{L}(E)$ est le générateur unitaire de l'idéal $\{P\in\mathbb{K}[X] \,/\, P(u)=0\}=\langle\Pi_u\rangle$.

Proposition 21. $u\in\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi Π_u est scindé à racines simples, et dans ce cas on a $\Pi_u=\prod_{\lambda\in Sp(u)}(X-\lambda)$.

Exemple 22. Pour les matrices $M_0:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $M_1:=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $M_2:=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ on a $\Pi_{M_0}=X$, $\Pi_{M_1}=X^2$ et $\Pi_{M_2}=X^3$. Remarquons qu'à chaque fois on a $\Pi_{M_i}\,|\,\chi_{M_i}=-X^3$.

4) Application : résolution de $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$

① On se ramène à $U_{n+1}=MU_n$ avec $U_n:=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}$.

② On diagonalise M et on écrit $M=PDP^{-1}$.

③ On calcule M^n grâce à $(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}$ et on conclut.

III Familles d'endomorphismes diagonalisables

1) Topologie des matrices diagonalisables

Proposition 23. L'ensemble des matrices (diagonalisables) à n valeurs propres distinctes est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de sa topologie d'espace vectoriel normé.

Remarque 24. Ce résultat est faux sur $\mathbb{R}$, au sens où l'adhérence des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; par exemple $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas trigonalisable.

Remarque 25. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ on peut compter les matrices diagonalisables.

Corollaire 26 (Théorème de Cayley-Hamilton). Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ avec $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Alors $\Pi_u\,|\,\chi_u$, i.e. $\chi_u(u)=0$.

Remarque 27. $\mathcal{L}(E)$ est donc une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 où chaque élément a un polynôme minimal de degré au plus n.

Remarque 28. Si χ_u possède n racines distinctes alors $\Pi_u=(-1)^n\chi_u$.

2) Endomorphismes normaux

On suppose dans cette section que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que E est muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. De plus, u désigne un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition/Définition 29. Il existe un unique $u^*\in\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x,y\in E,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle.$$

L'endomorphisme u^* est l'adjoint de u.

Proposition 30. Si B est une base orthonormale de E alors $Mat_B(u^*)=\overline{Mat_B(u)}^T$.

Définition 31. On dit que u est normal si $u^*u=uu^*$.

Théorème 32 ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) u est normal ssi u se diagonalise dans une base orthonormale de E.

Remarque 33. Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale (i.e. $M=M^*:=\overline{M}^T$) alors M n'est a priori pas $\mathbb{R}$-diagonalisable : par exemple $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ est normale mais $Sp_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\emptyset$.

Définition 34. On dit que u est auto-adjoint si $u^*=u$.

Théorème 35 (Théorème spectral). u est auto-adjoint ssi u se diagonalise dans une base orthonormée de E et $Sp(u)\subseteq\mathbb{R}$.

Remarque 36. Matriciellement, le théorème spectral donne :

- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique ($M = M^T$) ssi $M = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale ;
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne ($M = M^*$) ssi $M = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale.

Application 37 (décomposition polaire). $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}),$ $M = OS$ $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! (U,H) \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}), M = UH)$.

3) Codiagonalisabilité

Définition 38. Soit I un ensemble d'indices et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **codiagonalisable** si les u_i possède une base de diagonalisation commune.

Remarque 39. Si (u_i) est codiagonalisable alors chaque u_i est diagonalisable.

Proposition 40. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent.

- Les sous-espaces propres de u sont stables par v.
- Si u possède n valeurs propres distinctes alors u et v sont codiagonalisables et v est un polynôme en u.

Proposition 41. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable.

Corollaire 42. On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Alors si $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K})$ on a $n = m$.

Corollaire 43. Toute sous-algèbre réduite (i.e. le seul élément nilpotent est 0) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est codiagonalisable. (DEV 1)

Corollaire 44. Toute représentation linéaire irréductible d'un groupe abélien fini est de dimension 1.

Exemple 45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas codiagonalisables.

IV Décomposition de Dunford

Théorème 46. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; on suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

- d est diagonalisable ;
- n est nilpotent ;
- d et n commutent ;

qui vérifie $u = d + n$. De plus, d et n sont des polynômes en u. (DEV2)

Remarque 47. On dispose d'un algorithme pour générer (d,n) à partir de u, qui est exact en pratique pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ par exemple. DEV3

Définition 48. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\exp(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque 49. $\exp(u)$ est bien défini si l'on munit $\mathcal{L}(E)$ d'une norme d'algèbre.

Proposition 50. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a u diagonalisable ssi $\exp(u)$ est diagonalisable.

Proposition 51. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Application 52. On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = 2z(t) \\ y'(t) = x(t) - 5z(t) \\ z'(t) = y(t) + 4z(t) \end{cases}$$

pour $x, y, z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On écrit ce système sous la forme $X' = MX$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. On a $M = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; on conclut par le fait que les solutions de (S) sont de la forme $t \mapsto Ce^{tM} = Ce^{tD}e^{tN}$.

DEV 1 : toute sous-algèbre réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est codiagonalisable

DEV 2 : décomposition de Dunford

DEV3 : générer la décomposition de Dunford

Références

Gourdon, Algèbre

Serre D., Matrices : théorie et pratique

Mneimné, Réduction des endomorphismes (DEV)

Riesler Boyer, Algèbre pour la L3

Francinou, Oraux X-ENS Algèbre T1 (DEV)