155 ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES EN DIMENSION FINIE

Cadre : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :
$$L(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \quad f \longmapsto M_{\mathcal{B}}(f)$$
où $M_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
Ainsi tous les résultats sur les endomorphismes de E s'appliquent aux matrices.

I/ DEFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1) Valeurs propres, vecteurs propres

[GRI] [PEA] **Déf 1** : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f \in L(E)$ s'il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre de f associé à λ. On appelle spectre de f l'ensemble :
$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre de } f\}$$

Déf 2 : On note $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$ l'espace propre associé à λ. C'est un sous-espace vectoriel stable par f, i.e. $f(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$.

Rq 3 : Si $\dim E < +\infty$, $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif
$\Leftrightarrow \det(f - \lambda Id_E) = 0$

Ex 4 : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: A \quad Sp(A) = \{3\}. \quad E_3(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Ex 5 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotation d'angle θ et de centre $O_{\mathbb{R}^2}$. Si $\theta \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, f n'a pas de vecteur propre et $Sp(f) = \emptyset$.

Prop 6 : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors $\forall f \in L(E)$, $Sp(f) \neq \emptyset$.

Th 7 : 1) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de f, $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$

2) Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i Id_E)$, ces noyaux n'étant pas réduits à $\{0\}$, alors $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

2) Polynôme minimal, théorème de décomposition des noyaux

Déf 8 : (polynôme d'endomorphisme) Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ dans $\mathbb{K}[X]$. $\forall f \in L(E)$, on note $P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_p f^p \in L(E)$. [PEA]

Th 9 : Soit $f \in L(E)$. Considérons $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow L(E)$, $P \longmapsto P(f)$

1) φ_f est un morphisme d'algèbres

2) $\mathrm{Im}(\varphi_f)$ est la sous-algèbre de $L(E)$ engendrée par f, notée $\mathbb{K}[f]$ (algèbre des polynômes en f)

3) $\ker(\varphi_f)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$: l'idéal des polynômes annulateurs de f, i.e. qui vérifient $P(f) = 0_{L(E)}$.

Déf 10 : Si $\dim E < +\infty$, il existe un unique polynôme unitaire $\Pi_f \neq 0$ tel que $\ker(\varphi_f) = \Pi_f \cdot \mathbb{K}[X]$. Π_f est le polynôme minimal de f sur $\mathbb{K}$. C'est le polynôme de degré minimal annulant f sur $\mathbb{K}$.

Ex 11 : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: A \quad \Pi_A = (X-3)^3$.

Th 12 : (Décomposition des noyaux) Soit $f \in L(E)$ et $P = P_1 \dots P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que les polynômes P_i soient premiers entre eux deux à deux. Alors : [GOU] p175
$$\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_k(f)$$

3) Polynôme caractéristique

Déf 13 : Soit M la matrice canoniquement associée à $f \in L(E)$. $\chi_f(X) = \det(M - X Id_E) \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme caractéristique de f.

Prop 14 : 1) $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \lambda$ racine de $\chi_f \Leftrightarrow \lambda$ racine de Π_f. [GOU] p162 p176

2) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Ex 15 : Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors $\chi_f = (-1)^n X^n$ (où $n = \dim E$) et $Sp(f) = \{0\}$. [GOU] p163

Prop 16 : Soit $f \in L(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$ racine d'ordre m_λ de χ_f.
Alors $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$.

[GOU] p176

Th 17 : (de Cayley - Hamilton) $\chi_f(f) = 0$.

II / DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES

1) Définition et critères de diagonalisabilité

Déf 18 : $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale dans $M_n(\mathbb{K})$.
$f \in L(E)$ est diagonalisable si la matrice associée l'est.

[GOU] p164 p175 [GRI] p183 p164-166

Th 19 : Soit $f \in L(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) f est diagonalisable
2) il existe une base de E formée de vecteurs propres de f
3) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$
4) $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f)$
5) χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\forall \lambda \in Sp(f)$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(f)$.
6) Il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples
7) Π_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples, i.e.
$\Pi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Ex 20 : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Ex 21 : $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $A = 0$.

2) Décomposition de Dunford

[GOU] p164 p171

Th 22 : (Codiagonalisation) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de $L(E)$.
Si les f_i sont diagonalisables et commutent deux à deux, alors il existe une base commune de diagonalisation pour tous les f_i

[GOU] p193 -196 (DVP)

Th 23 : (Décomposition de Dunford) Soit $f \in L(E)$ tel que Π_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in L(E)^2$ tel que : (i) d diagonalisable (ii) n nilpotent
(iii) $f = d + n$ (iv) $n \circ d = d \circ n$

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Ex 24 : $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ La décomposition de Dunford de A est :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{d} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n}$$

3) Théorème spectral

[GOU] p244

Th 25 : Soit E un espace euclidien (ou hermitien) et $f \in L(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f, et les valeurs propres de f sont réelles.

4) Réduction des endomorphismes normaux

[GOU] p258 - 260

Déf 26 : Soit $f \in L(E)$ où E est un espace hermitien. On dit que f est normal si f et f^* commutent.

Th 27 : Soit $f \in L(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) f est normal
2) f se diagonalise dans une base orthonormale de E.
3) f et f^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

[GOU] p 260

(DVP)

Th 28 : Soit E un espace euclidien, $f \in L(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$

où pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout j, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

III / CONSÉQUENCES ET APPLICATIONS.

1) Calcul des puissances d'une matrice et étude des suites récurrentes linéaires.

[PEA] p 25

Ex 29 : $\underbrace{\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}}_{X_n} \Rightarrow \boxed{X_n = A^n X_0}$

$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k D^{n-k} N^k$

On trouve $\begin{cases} U_n = 3^{n-2}(9U_0 + 3nV_0 + (n^2-4n)W_0) \\ V_n = 3^{n-1}(3V_0 + 2nW_0) \\ W_n = 3^n W_0 \end{cases}$

2) Calcul de l'exponentielle d'une matrice et résolution de systèmes différentiels linéaires.

Ex 30 : $\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$, $X(0) = X_0$.

La solution est donnée par $\boxed{X(t) = e^{tA} X_0 = e^{tD} e^{tN} X_0}$

$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$ $\quad e^{tN} = \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k N^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & -t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve $\begin{cases} x(t) = e^{3t}x_0 + te^{3t}y_0 + (2t^2-t)e^{3t}z_0 \\ y(t) = e^{3t}y_0 + 2te^{3t}z_0 \\ z(t) = e^{3t}z_0 \end{cases}$

3) Densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ et applications

Th 31 : L'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ [GOU] p 185

App 32 : $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$ $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$.

App 33 : Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & D \end{array}$ où D est la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford de A. [OA] p 180

Alors φ n'est pas continue.

Références :

[PEA] : Mathématiques L2, Pearson Education

[GRI] : Algèbre Linéaire, Joseph Grifone

[GOU] : Algèbre, Xavier Gourdon

[OA] : Objectif Agrégation

Développements

DERENNES Pierre
ROBERT Samantha

25 septembre 2014

Théorème (Décomposition de Dunford) : Soit K un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K de dimension finie et $u \in L(E)$ dont le polynôme minimal est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in L(E)^2$ tel que :
• $u = d + n$
• d est diagonalisable.
• n est nilpotent.
• n et d commutent : $n \circ d = d \circ n$
De plus, d et u sont des polynômes en u.

Démonstration. Existence : Soit $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - a_i)^{\omega_i}$ le polynôme minimal de u (avec $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$). Les polynômes $(X - a_i)^{\omega_i}$ étant deux à deux premier entre eux, on a par le théorème de décomposition des noyaux :

$$E = Ker(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker((X - a_i)^{\omega_i}(u))$$

et $\forall i \in \{1, .., m\}$ le projecteur P_i de E sur $Ker((X - a_i)^{\omega_i}(u))$ est un polynôme en u (en particulier ils commutent entre eux). Posons :

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i P_i \; et \; n = u - d$$

Par construction on a bien $u = d + n$ et que n et d commutent car ce sont des polynômes en u.
Pour tout $i \in \{1, .., m\}$ notons $B_i = (e_{i,k})_k$ une base de $Ker((X - a_i)^{\omega_i}(u))$. Alors $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ est une base de E telle que $d(e_{i,k}) = a_i e_{i,k}$ et d est diagonalisable.
Soit $x \in E$. Ecrivons $x = x_1 + ... + x_m$ où $x_i \in Ker((X - a_i)^{\omega_i}(u))$ et notons $\omega = max(w_i)$. Alors :

$$n^{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{m} n^{\omega}(x_i) = \sum_{i=1}^{m} (X - a_i)^{\omega_i}(u)(x_i) = 0$$

Donc u est nilpotent.

Unicité : soit (d', n') un autre couple convenant. Alors comme d' commute avec n', il commute aussi avec u ($u \circ d' = d' \circ d' + n' \circ d' = d' \circ d' + d' \circ n' = d' \circ u$) et donc avec tout polynôme en u, en particulier d. Donc d et d' sont codiagonalisables, et donc $d - d'$ est diagonalisable. D'autre part n et n' commutent donc en notant n_1 et n_2 leur indice de nilpotence respectifs, on a par la formule de binôme de Newton

$(n-n')^{n_1+n_2}=0$ donc $n-n'$ est nilpotent.
Au final, $\Delta = d'-d = n-n'$ est un endomorphisme a la fois diagonalisable et nilpotent donc nul, d'où l'unicité. $\square$

Définition : Soit E un espace hermitien. $u \in L(E)$ est normal si u et u* commutent.
Lemme 1 : Soit $u \in L(e)$ et F un s.e.v de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u*

Démonstration. : Soit $x \in F$. Par hypothèse, $u(x) \in F$ donc

$$\forall y \in F^\perp, 0 = u(x).y = x.u^*(y)$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, on a $u^*(y) \in F^\perp$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F^\perp$, $F^\perp$ est stable par u*. □

Lemme 2 : Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme normal. Si E_λ est un sous-espace propre de u, $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Démonstration. : Comme u et u* commutent, E_λ est stable par u* donc d'après le lemme 1, $E_\lambda^\perp$ est stable par (u*)*=u. □

Proposition : Soit $u \in L(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) u est normal.
(ii) u se diagonalise dans une BON de E.
(iii) u et u* se diagonalisent dans une BON commune.

On s'intéresse maintenant au cas réel : on cinsidère dans la suite un espace euclidien E.

Lemme 3 : Soit E un espace euclidien de dimension 2; $u \in L(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute BON B de E on a :

$$mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ avec\, b \neq 0.$$

Démonstration. : Ecrivons :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

On a $b \neq 0$ car u est sans valeur propre réelle. Comme u est normal M*M = MM*, on a donc en particulier (par identification des coefficients) :

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \ et\ ab + cd = ac + bd$$

On a donc $b = c$ ou $b = -c$ par la première assertion Si $b = c$ alors M est symétrique, ce qui est impossible car u est sans valeur propre réelle. Donc $b = -c$. On a donc en reportant dans la seconde assertion $2(a-d)b = 0$ soit $a = d$. □

Théorème (Réduction des endomorphismes normaux (cas réel)) : Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormale B de E telle que

$$mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \qquad (*)$$

où $\forall i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout j, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence forte sur $n = dim(E)$. Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer. Supposons alors le résultat vrai pour tout espace euclidien de dimension inférieure à $n-1$ et considérons E un espace euclidien de dimension n. Deux cas se présentent :
Si u avec une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on peut considérer E_λ et $F = E_\lambda^\perp$. F est stable par u (lemme 2) et par u* (lemme 1) donc on peut considérer les endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$qui commutent. Comme $dim(F) \leq n-1$ il existe, par hypothèse de récurrence, une BON B_2 de F telle que $mat_{B_1}(u_{|F})$ soit de la forme (*). Alors si B_1 est une BON de $F^\perp$ on a que $B = (B_1, B_2)$ est une BON de $E = F^\perp \oplus F$ dans laquelle $mat_B(u)$ est de la forme (*).

Sinon u est sans valeur propre réelle. Condisérons $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible du polynôme caractéristique de u. Posons $N = Ker(Q(u))$. Montrons que $N \neq 0$. En effet on peut écrire $Q = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons M la matrice de u dans une base quelqconque de E. Alors on a alors

$$det(Q(u)) = det(Q(M)) = det(M - \lambda I_n)det(M - \bar{\lambda} I_n) = 0$$

N est stable par u et par u* (u et u* commutent). On peut donc considérer $v = u_{|N}$. On a $v^* = u^*_{|N}$, de sorte que l'endomorphisme $v^*v = (u^*u)_{|N}$ est symétrique donc admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ.

Posons $F = vect(x, u(x))$. $dim(F) = 2$ car u n'admet pas de valeur propre réelle. De plus F est stable par u car $x \in N$ donc $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta$ (**).
Montrons que F est aussi stable par u*. La relation (**) entraine que $F = vect(u(x), u^2(x))$.
On a

$$u^*(u(x)) = v^*(v(x)) = \lambda x \in F$$

et comme u et u* commutent,

$$u^*(u^2(x)) = u(u^*u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) \in F$$

ce qui montre que F est stable par u* car $(u(x), u^2(x))$ est une base de F.

Comme $(u_{|F})^* = (u^*)_{|F}$, $u_{|F}$ est un endomorphisme normal donc par le lemme 3 il existe une BON B_1 de F telle que $mat_{B_1}(u_{|F})$ soit de la forme

$$\tau = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Or, $F^\perp$ est stable par u (car F est stable par u*) et par u* (car F est stable par u). Donc $(u_{F^\perp})^* = (u^*)_{|F^\perp}$, ce qui prouve que $u_{|F^\perp}$ est normal. Ainsi par hypothèse de récurrence il existe une BON B_2 de $F^\perp$ telle que $mat_{B_2}(u_{|F^\perp})$ soit de la forme (*).
Ainsi la base $B = (B_1, B_2)$ est alors une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme (*) $\square$