155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Dans la suite, E désignera un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,E)$

I) Outils pour la diagonalisation

<u>Déf 1</u> : On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ si $f - \alpha Id_E$ est non injective.

<u>Déf 2</u> : Soit λ une valeur propre de f. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f, appelé sous-espace propre de f associée à la valeur propre λ.

Un éléments non nul de E_λ est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

<u>Thm 3</u> : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de f, distincts deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

<u>Déf 4</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P_A(X) = \det(A - XI_n)$

<u>Thm-déf 5</u> : Le polynôme caractéristique de la matrice qui représente f dans une base de E est indépendant du choix de cette base, on l'appelle polynôme caractéristique de f on a le note χ_f ou P_f.

<u>Prop 6</u> : λ est valeur propre de f si et seulement si $P_f(\lambda) = 0$

<u>Corollaire 7</u> : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, f admet au moins une valeur propre.

<u>Prop 8</u> : f et ${}^t f$ ont le même polynôme caractéristique.

<u>Prop 9</u> : Soit F un sous-espace vectoriel strict de E ($F \neq E$, $F \neq \{0\}$) stable par f. Soit $g = f_{|F}$ la restriction de f à F. Alors $g \in \mathcal{L}(F)$ et P_g divise P_f.

<u>Déf 10</u> : L'endomorphisme f est dit diagonalisable si il existe une base de vecteurs propres de f.

<u>Déf 11</u> : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

II) Critères de diagonalisation

<u>Prop 12</u> : Si P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, Alors f est diagonalisable.

<u>Prop 13</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P_f d'ordre de multiplicité h, alors $\dim E_\lambda \leq h$

<u>Thm 14</u> : les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ_i de P_f d'ordre de multiplicité h_i, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$

(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de f vérifiant

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

<u>Corollaire 15</u> : Si f admet n valeurs propres distincts (deux à deux) alors f est diagonalisable.

<u>Prop 16</u> : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$. Si λ est valeur propre de f. Alors $P(\lambda) = 0$

<u>Prop 17</u> : (décomposition des noyaux)

Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$, (P_i) étant premiers entre eux (deux à deux)

Alors : $\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$

<u>Thm 18</u> : L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ ayant toutes ses racines simples tel que $P(f) = 0$.

<u>Corollaire 19</u> : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

<u>Déf 20</u> : f est dit trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

<u>Thm 21</u> : f est trigonalisable si et seulement si P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Thm 22 : (Cayley-Hamilton) $P_f(f) = 0$

Prop-déf 23 : Soit le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre $\varphi_f : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array}$

Il existe un unique polynôme unitaire π_f qui engendre $\ker \varphi_f$ que l'on appelle le polynôme minimal de u.

Corollaire 24 : $\pi_f \mid P_f$

Thm 25 : les racines de $\pi_f(X)$ sont exactement les racines de $P_f(X)$

Thm 26 : f est diagonalisable si et seulement si son polynômes minimal est scindé, à racines simples.

Prop 27 : Si $|\mathbb{K}| = q \in \mathbb{N}^*$ alors f est diagonalisable $\Leftrightarrow f^q = f$

Thm 28 : Soit $n \geq 1$ un entier. Alors le nombre de matrices diagonalisables dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur le corps $\mathbb{F}_q$ est égale à

$$\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_{q-1}) \\ n_1 + \dots + n_{q-1} = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$$

III) Exemples

Ex 29 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et donc $\mathbb{C}$) car $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ admet 3 racines distincts.

Ex 30 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2$ et $\dim E_{-2} = 2$

Ex 31 : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$ car $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ et $\dim E_1 = 1 < 2$.

Ex 32 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+3\lambda+3)$

Ex 33 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $m_A(X) = (X+2)(X-1)$

Ex 34 : $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(X) = -(X-1)^3$ d'où $m_A(X) = \begin{cases} X-1 \\ \text{ou } (X-1)^2 \\ \text{ou } (X-1)^3 \end{cases}$ et A diag $\Leftrightarrow m_A(X) = X-1$ $\Leftrightarrow A - I = 0$

Ex 35 : les homothéties (λId) sont diagonalisables.

Ex 36 : les symétries ($S \in GL_n(\mathbb{R})$, $S^2 = Id$) sont diagonalisables

Ex 37 : les projections ($p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p^2 = p$) sont diagonalisables

Ex 38 : les dilatations ($u \in GL_n(\mathbb{R})$, $u_{|H} = Id$ et $\det(u) = \lambda \neq 1$ où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$) sont diagonalisables.

Ex 39 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} f \neq 0$.

Ex 40 : Soient $a_1, \dots, a_{n-1}$ et $b_1, \dots, b_{n-1}$ des réels, avec $n \geq 3$. Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A = 0 \text{ ou } \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$$

Notation 41 : $M^* = \begin{cases} {}^tM \text{ si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ {}^t\overline{M} \text{ si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \end{cases}$

Thm 42 : Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $f \in \mathcal{L}(E)$, un automorphisme autoadjoints. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f, et de plus ses valeurs propres sont réelles.

Corollaire 43 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors il existe C orthogonale (resp unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$ où D matrice diagonale réelle.

Thm 44 : Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme unitaire. Alors il existe une base orthonormale qui diagonalise u, et toutes les valeurs propres de u ont leur module égal à 1.

Thm 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

(i) u est normal (u et u^* commutent)

(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E

(iii) u et u^* se diagonalise dans une base orthonormale quelconque.

Thm 46 : Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe une base orthogonale B de E telle que :
$$[u]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{l} \forall i,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \forall j,\ \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

Thm 47 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant $M^* + M = 0$. Alors $\exists U$ unitaire telle que $U^{-1}MU = U^*MU = D$ soit diagonale et les coefficients de D sont imaginaires purs.

Thm 48 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, alors $\exists P$ orthogonale telle que
$$P^{-1}MP = P^*MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}$$

IV) Applications :

Thm 49 : L'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Prop 50 : Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
$g \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \Phi = \{\varphi^{-1} g \varphi \mid \varphi \in GL(E)\}$ est fermé.

Application 51 : Calcul de la puissance d'une matrice :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale tq $A^n = PD^nP^{-1}$

Application 52 : Résolution d'un système de suite récurrente :
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \ ; \ u_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n ; \ v_0 = 1 \end{cases}$$
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, d'où $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X_n = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Application 53 : Système différentiel linéaire à coefficients constants :
$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$
avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$
a) On diagonalise A en $A' = P^{-1}AP$ diagonale
b) On résout $\frac{dX'}{dt} = AX'$
c) On revient à X par $X = PX'$

Thm 54 : (Dunford) :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente tel que :
(i) $f = d + n$
(ii) $n \circ d = d \circ n$

DEV

Lemme 55 : Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base commune de diagonalisation de f et g (on dit que f et g sont alors codiagonalisables).

Déf 56 : Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, l'endomorphisme $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}$ s'appelle l'exponentielle de f et est notée $\exp(f)$

Prop 57 : Soient $u \in \mathcal{L}_c(E)$, $v \in \mathcal{L}_c(E)$ inversible avec $v^{-1} \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors
$$\exp(v^{-1}uv) = v^{-1}\exp(u)v$$

Thm 58 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dim° finie. Alors u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ est diagonalisable.

Lemme 59 : Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\forall k \geq 1$, $Tr(A^k) = 0$
Alors A est nilpotente

DEV

Thm 60 : (Burnside)
Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est fini $\Leftrightarrow$ G est d'exposant fini

Thm 61 : Soit G un groupe fini, alors pour toute représentation ρ de G, les éléments de $Im(\rho)$ sont diagonalisables.

Corollaire 62 : Si de plus, G est abélien, alors ces éléments sont codiagonalisable.

Déf 63 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction
On définit la transformée de Fourier discrète (TFD) de l'échantillon $f = \{f[n]\}_{n=0}^{N-1}$ comme étant le vecteur $\hat{f} = \{\hat{f}[k]\}_{k=0}^{N-1}$
avec $\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, \omega_N^{-nk}$ pour $k = 0, \dots, N-1$
où $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$

Thm 64 : La transformée de Fourier discrète est diagonalisable en base orthonormée de $\mathbb{C}^N$

Thm 65 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ réduite (tel que le seul nilpotent est 0). Alors les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

DEV

<u>Références</u>: GOURDON "Algèbre"

GRIFONE "Algèbre linéaire"

BECK "Objectif Agrégation"

PEYRE "Transformée de Fourier discrète"

Décomposition de Dunford

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Références :
- [FGN09] p.134–135 et [BMP05] p. 210–211 et 215–216.

Proposition 1 (Dunford)
Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

(i) d soit diagonalisable ;

(ii) n soit nilpotent ;

(iii) $f = d + n$;

(iv) $n \circ d = d \circ n$.

De plus, d et n sont alors des polynômes en f.

DÉMONSTRATION :
- *Existence.* Comme χ_f est scindé on peut l'écrire sous la forme :

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)_i^{\alpha}$$

Si on pose pour $i \in [s]$ $N_i := \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$ on a alors par lemme des noyaux appliqué à χ_f :

$$E = \ker(\chi_f(f)) = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$$

On définit alors d et n de la façon suivante :

$$\forall i \in [s],\ \forall x \in N_i,\ \begin{cases} d(x) := \lambda_i x \\ n(x) := f(x) - \lambda_i x \end{cases}$$

Il est alors clair que $d + n = f$, que d est diagonalisable (prendre une base adaptée à la décomposition $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$) et que :

$$\forall i \in [s],\ \forall x \in N_i,\ n^{\alpha_i}(x) = (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)_i^{\alpha}(x) = 0$$

Ainsi, si on pose $\alpha := \max_i(\alpha_i)$ et si on décompose $x \in E$ en $x = x_1 + \ldots + x_s$, avec $\forall i \in [s]$, $x_i \in N_i$ alors :

$$\begin{aligned} n^{\alpha}(x) &= n^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{s} n^{\alpha}(x_i) \text{ par linéarité} \\ &= 0 \text{ car } n^{\alpha} = 0 \text{ sur chaque } N_i \end{aligned}$$

Donc n est bien nilpotent.

Si on note, pour $i \in [s]$, p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} N_j$ on a de plus :

$$\forall x = x_1 + \ldots + x_s \in E, \text{ les } x_i \in N_i, \ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \underbrace{p_i(x)}_{=x_i} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{s} d(x_i)$$
$$= d(x)$$

I.e :

$$d := \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i \tag{1}$$

Démontrons à présent que les p_i sont des polynômes en f. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ étant premiers entre eux, le théorème chinois nous affirme l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [s], \qquad P \equiv \lambda_i [(X - \lambda_i)^{\alpha_i}]$$

Formulé autrement, ceci signifie que pour tout $i \in [s]$ il existe $R_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = \lambda_i + R_i (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Or, par décomposition en sous-espaces caractéristiques (cf. supra), tout élément $x \in E$ admet une unique écriture sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_s$ avec pour tout $i \in [s]$ $x_i \in N_i$. De plus :

$$\forall i \in [s], \qquad P(f)(x_i) = \lambda_i x_i + R_i(f) \circ (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(x_i) = \lambda_i x_i$$

Ainsi :

$$\forall x \in E, \qquad P(f)(x) = d(x)$$

Et donc $d = P(f)$ est bien un polynôme en f, donc $n = u - d$ également. Ceci implique naturellement que d et n commutent.

- *Unicité.* Soient d' et n' vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv). Comme d' (resp. n') commute avec n' (resp. d') (par hypothèse (iv)) et avec lui-même, il commute avec $f = d' + n'$ (hypothèse (iii)) donc avec les polynômes en f. En particulier d commute avec d' et n avec n'. Le premier résultat implique que d et d' sont co-diagonalisables et donc que $d - d'$ est diagonalisable, le second que $n' - n$ est nilpotente. De fait l'endomorphisme $d - d' = n' - n$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul, d'où le résultat.

Corollaire 1.1
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$.
Alors :

$$\exp(f) \textit{ est diagonalisable } \Leftrightarrow f \textit{ est diagonalisable}$$

Démonstration :

($\Leftarrow$) Immédiat.

($\Rightarrow$) Notons $f = d + n$ la décomposition de Dunford de f (avec notations évidentes). D'après la proposition 2, il existe un endomorphisme nilpotent n' tel que $\exp(n) = n' + \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}$ et donc, comme n et d commutent, on a :

$$\exp(f) = \exp(d) + \exp(d) n' \tag{2}$$

Or, toujours comme d et n commutent, e^d et e^n commutent et donc e^d et $n' = e^n - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}$ également. De fait e^d et $e^d n'$ commutent. Or e^d est diagonalisable et $e^d n'$ nilpotent donc par unicité la décomposition de Dunford de e^f est donnée la relation (2) et donc nécessairement, comme e^f est diagonalisable on a $e^d n' = 0$. Comme $e^d \in GL(\mathbb{C}^d)$, on a $n' = 0$ d'où $e^n = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}$ ce qui implique (toujours par la proposition 2) que $n = 0$. D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- *$n' - n$ est nilpotente.* Supposons que $n^p = 0$ et $n'^q = 0$. Alors :

$$(n' - n)^{p+q} = \sum_{i=1}^{p+q} C_{p+q}^i n'^i (-1)^{p+q-i} n^{p+q-i} \text{ car } n \text{ et } n' \text{ commutent}$$

  Or si $i < q$, $p + q - i > p$ et donc $n^{p+q-i} = 0$; et si $i \geq q$ alors $n'^i = 0$. In fine $(n' - n)^{p+q} = 0$ d'où le résultat (cf. [Gou94], p. 191).

- *Une autre démonstration du fait que d et n sont des polynômes en u peut être trouvée dans [Gou94], p. 192.* Pour $i \in [s]$ on définit le polynôme suivant :

$$Q_i := \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$$

  Les Q_i sont premiers entre eux et donc par identité de Bézout il existe $U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1 \tag{3}$$

  Posons $\forall i \in [s]$, $f_i := U_i Q_i(f) = U_i(f) \circ Q_i(f)$ et montrons que $f_i = p_i$ ce qui donnera le résultat voulu. Fixons $i \in [s]$.

  * Pour tous $i \neq j$, $\chi_f | Q_i Q_j$ donc :

$$\forall i \neq j \; f_i \circ f_j = U_i Q_i(f) \circ U_j Q_j(f) = U_i U_j(f) \circ Q_i Q_j(f) = 0 \tag{4}$$

  Or d'après (3) :

$$f_i = \mathrm{id}_E \circ f_i = \left(\sum_{j=1}^{s} U_j Q_j(f) \right) \circ f_i = \sum_{j=1}^{s} f_j \circ f_i = f_i^2$$

  Donc les f_i sont bien des projecteurs.

  * Montrons que $(Im)(f_i) = N_i$.
  Soit $y = f_i(x) \in (Im)(f_i)$. Alors :

$$\begin{aligned}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(y) &= (X - \lambda_i)^{\alpha_i}(f) \circ U_i Q_i(f) \\ &= U_i(f) \circ (X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i(f) \\ &= U_i(f) \circ \chi_f(f) \\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc $y \in N_i$.
  Réciproquement, si $x \in N_i$ alors par (3) on a $x = \sum_j f_j(x)$. Or, si $j \neq i$ $f_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f) = 0$ car $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} | Q_j$. In fine $x = f_i(x) \in \mathrm{Im}(f_i)$.

  * Montrons que $\ker(f_i) = \oplus_{j \neq i} N_j$.
  Si $j \neq i$ et $x \in N_j$ alors $f_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f) = 0$ car $(X - \lambda_j)^{\alpha_j} | Q_i$. La somme directe étant le sous espace vectoriel engendré par la réunion on a alors $\oplus_{j \neq i} N_j \subset \ker(f_i)$.
  Réciproquement, si $x \in E$ vérifie $f_i(x) = 0$ alors par (3) $x = \sum_{j \neq i} f_j(x)$. Or $\forall j \in s$, on a montré que $f_j(x) \in N_j$, d'où l'inclusion réciproque et le résultat.

- On admet le résultat suivant (cf. [MT97]) :

Proposition 2
On note $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{U}$) l'ensemble des endomorphisme nilpotents (resp. unipotents) de $\mathbb{C}^d$. Alors les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &\to \mathcal{U} \\ n &\mapsto \exp(n)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &\to \mathcal{N} \\ u &\mapsto u - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}\end{aligned}$$

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation (2e édition)*. H & K, 2005.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 2 (2e édition)*. Cassini, 2009.

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 1994.

[MT97] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1997.

Théorème de Burnside

Arnaud GIRAND

15 octobre 2013

Référence :
- [FGN09], p. 185–186

Lemme 1 ([FGN09], p. 111)
Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = 0$$

Alors A est nilpotente.

DÉMONSTRATION : Supposons A non nilpotente : on peut alors noter $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($r \geq 1$) ses valeurs propres (sur $\mathbb{C}$) non nulles et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}TP$ où T est triangulaire de diagonale $(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{n_1} \dots \underbrace{\lambda_r \dots \lambda_r}_{n_r}, 0 \dots 0)$. De plus, comme pour $k \geq 1$ on a $A^k = P^{-1}T^kP$ alors :

$$\forall k \geq 1, \quad 0 = \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k$$

De fait, le vecteur $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$ est solution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & & & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Le déterminant de ce système est alors, par déterminant de Vandermonde (cf infra) :

$$\left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Donc les n_i sont tous nuls, ce qui est absurde.

Proposition 1 (Burnside)
Soit $G \leq GL_n(\mathbb{C})$.
Alors G est fini si et seulement G est d'exposant fini[1].

DÉMONSTRATION : Le sens direct est immédiat par théorème de Lagrange. Pour le sens indirect, commençons par fixer une base $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ du s-e.v $\langle G \rangle_{\mathbb{C}}$ engendré par G dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : G &\to \mathbb{C}^m \\ A &\mapsto (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{aligned}$$

1. I.e $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall g \in G, g^N = I_n$.

Supposons que l'on ait A et B dans G telles que $f(A) = f(B)$. Alors, par linéarité de la trace on a :

$$\forall M \in \langle G \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$$

En particulier si on pose $D := AB^{-1} \in G$ et si $k \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(D^k) &= \mathrm{Tr}(A \underbrace{B^{-1}D^{k-1}}_{\in G \subset \langle G \rangle_{\mathbb{C}}}) \\
&= \mathrm{Tr}(BB^{-1}D^{k-1} \\
&= \mathrm{Tr}(D^{k-1} \\
&\vdots \\
&= \mathrm{Tr}(I_n) \\
&= n
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}((D - I_n)^k) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j D^{k-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j \mathrm{Tr}(D^{k-j}) \\
&= n(1-1)^k \\
&= 0
\end{aligned}$$

De fait $D - I_n$ est nilpotente (lemme 1).

Comme G est d'exposant fini $N \geq 1$, toutes ses matrices sont diagonalisables (car racines du polynôme scindé simple $X^N - 1$). Donc D est diagonalisable ce qui implique que $D - I_n$ l'est également (car $\forall P \in GL_n(\mathbb{C})$, $P^{-1}(D - I_n)P = P^{-1}DP - I_n$). Donc, par nilpotence, $D = I_n$ et donc f est injective.

Remarquons ensuite que $f(G) \subset X^m$ où $X := \{\mathrm{Tr}(A) \mid A \in G\}$ est fini car les valeurs propres d'éléments de G sont des racines N-ièmes de l'unité. De fait, par injectivité de f, G est fini.

Détails supplémentaires :

- *Déterminant de Vandermonde.* On désire calculer le déterminant suivant ([FGN09], p. 17), les $x_i \in \mathbb{C}$:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

  Il est clair que si deux des x_i sont égaux ce déterminant est nul. Dans le cas contraire on pose :

$$P := V(x_1, \ldots, x_{n-1}, X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$$

  En développant selon la première colonne on trouve que le coefficient de degré $n-1$ de P est $V(x_1, \ldots, x_{n-1}$; il est également clair d'après la remarque précédente que si $i \in [n-1]$, $P(x_i) = 0$. De fait, le polynôme unitaire de degré $n-1$ $\prod_{i \in [n-1]}(X - x_i)$ divise P et donc :

$$P = V(x_1, \ldots, x_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$$

  Ergo :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = P(x_n) = V(x_1, \ldots, x_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)$$

  Et donc par récurrence :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$$

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 2 (2e édition)*. Cassini, 2009.

Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

RIFFAUT Antonin

2013-2014

Définition 1. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre associative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que $\mathcal{A}$ est *réduite* si elle ne possède pas d'élément nilpotent non trivial.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre associative réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.*

Pour ce faire, nous allons établir que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables, et que $\mathcal{A}$ est commutative. Nous pourrons alors conclure que les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

Démonstration.

- Dans un premier temps, nous allons vérifier que si $\mathcal{A}$ est réduite, alors la sous-algèbre $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est également réduite. Nous pourrons alors supposer sans perte de généralité que $I_n \in \mathcal{A}$.
  Soit $M = A + \lambda I_n \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On suppose que M est nilpotente. Alors A est inversible : en effet, si μ est une valeur propre de A, alors $\mu + \lambda$ est une valeur propre de M. Comme M est nilpotente, son unique valeur propre est 0, d'où $\mu = -\lambda$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{-\lambda\}$ avec $-\lambda \neq 0$: A est donc inversible. En outre, comme A et M commutent, alors AM est également nilpotente. Or $AM = A^2 + \lambda A \in \mathcal{A}$; puisque $\mathcal{A}$ est réduite, nécessairement $AM = 0$, et par conséquent $A^{-1}AM = M = 0$, ce qui achève de démontrer que $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est réduite.
- À partir de maintenant, on suppose que $I_n \in \mathcal{A}$, de sorte que les polynômes en les éléments de $\mathcal{A}$ soient encore des éléments de $\mathcal{A}$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous allons démontrer que A est diagonalisable. Soit $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[X]$ son polynôme caractéristique, et $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i) \in \mathbb{C}[X]$. En notant $m = \max_{i \in \{1,\dots,r\}} m_i$, on a $\chi_A | P^m$, donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $P(A)^m = 0$. Or $P(A) \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est réduite, donc $P(A) = 0$. P étant scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.
- Il reste à démontrer que $\mathcal{A}$ est commutative. Pour ce faire, nous allons tout d'abord montrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée par les projecteurs de $\mathcal{A}$. Soit en effet $A \in \mathcal{A}$. Notons de nouveau $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Comme A est diagonalisable, alors

  $$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A).$$

  Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note p_i le projecteur sur $E_{\lambda_i}(A)$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(A)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

  $$Ax = A\left(\sum_{i=1}^r p_i(x)\right) = \sum_{i=1}^r A \underbrace{p_i(x)}_{\in E_{\lambda_i}(A)} = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i(x)$$

  d'où $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$. Les p_i sont des éléments de $\mathcal{A}$ en tant que polynômes en A : par exemple, $p_i = L_i(A)$ où L_i est le polynôme d'interpolation tel que $L_i(\lambda_j) = 0$ pour $i \neq j$, et $L_i(\lambda_i) = 1$. Finalement, toute matrice $A \in \mathcal{A}$ est combinaison linéaire finie de projecteurs de $\mathcal{A}$.

Pour conclure, observons que si $A \in \mathcal{A}$ et si B est un projecteur de $\mathcal{A}$, alors

$$\begin{aligned}(BAB - BA)^2 &= BABBAB - BABBA - BABAB + BABA \\ &= BABAB - BABA - BABAB + BABA \\ &= 0.\end{aligned}$$

$BAB - BA$ est nilpotente et appartient à $\mathcal{A}$, donc $BA = BAB$. De même, $(BAB - AB)^2 = 0$ d'où $BAB = AB$. On en déduit que $AB = BA$. Dans le cas général, étant données $A, B \in \mathcal{A}$ quelconques, il suffit d'écrire B comme combinaison linéaire finie de projecteurs de $\mathcal{A}$, et on aboutit aisément à la même conclusion. L'algèbre $\mathcal{A}$ est bien commutative. ■

Complément : diagonalisation simultanée

Proposition 3. *Soient K un corps (commutatif), E un K-espace vectoriel de dimension finie n, I un ensemble, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors les f_i sont codiagonalisables.*

Démonstration. Nous allons raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est immédiat. Supposons que $n \geq 2$. On distingue deux cas :

Cas 1 : les f_i sont tous des homothéties. Le résultat est alors direct.

Cas 2 : il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Comme f_{i_0} est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f_{i_0}).$$

Fixons $k \in \{1, \ldots, r\}$. $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$ est stable par f_{i_0} et par tous les f_i, $i \neq i_0$, car ils commutent tous avec f_{i_0}. Pour $i \in I$, notons alors $g_{k,i}$ l'endomorphisme induit par f_i sur $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$. Les endomorphismes $g_{k,i}$ sont diagonalisables et commutent deux à deux ; de plus, $\dim E_{\lambda_k}(f_{i_0}) < n$ (car f_{i_0} n'est pas une homothétie). Par hypothèse de récurrence, il existe alors une base $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$ dans laquelle les matrices des $g_{k,i}$ sont toutes diagonales. La base $\mathcal{B}$ de E obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ des $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$ est alors une base de diagonalisation simultanée des endomorphismes f_i, ce qui conclut la preuve. ■

Références

[MNE] MNEIMNÉ, *Réduction des endomorphismes.*