155 ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES EN DIMENSION FINIE

I. ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE.

1. SOUS-ESPACE PROPRE. [GRi]

Cadre : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on note M la matrice qui représente f dans cette base.

Def 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si $v \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$.
Le scalaire λ est dit valeur propre correspondante à v.

Exemple 2 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est la rotation d'angle θ et de centre O alors si $\theta \neq k\pi$, f n'a pas de vecteurs propres.

Exemple 3. Soit $k \in K$ et $h_k : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto kx \end{array}$ l'homothétie de rapport k. Tout vecteur non nul de E est vecteur propre correspondant à la valeur propre k.

Def 4. $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Def 5 : Soit $\lambda \in K$. On note $E_\lambda = \{v \in E \,/\, f(v) = \lambda v\}$ le sous-espace propre correspondant à λ.

Théorème 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f.
On a équivalence entre les propriétés suivantes :
i) f est diagonalisable
ii) E est somme directe des espaces propres. $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
iii) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

Exemple 7 : Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et
$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & & \\ a & b & a & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ b & a & b & & a \end{pmatrix}$$
Alors A est diagonalisable.

Corollaire 8 : Si f a n valeurs propres distinctes alors f est diago.

Appli 9 : Décomposition spectrale.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les propositions :
i) s'il existe un système complet de projecteurs $\{P_1, \dots, P_q\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ 2 à 2 distincts tel que $f = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_q P_q$
ii) f est diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont les valeurs propres de f

Exemple 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad P_1 = \frac{I+A}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \frac{I-A}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^n = P_1 + (-1)^n P_2$

2. DÉCOMPOSITION DE $K[f]$ EN SOUS-ESPACES STABLES. [OA]

Def 11. Soit F sev de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Exemple 12. $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont stables par f.

Exemple 13 : Il existe une infinité de sous-espaces stables par l'endomorphisme f représenté par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lemme 14 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$.
Alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

Exemple 15 : Soit $P \in K[X]$. Comme $P(f)$ et f commutent, $\mathrm{Ker}\, P(f)$ est stable par f.

Def 16 : On considère le morphisme de K-algèbre :
$\varphi_f : \begin{array}{|l} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array}$ On définit l'algèbre des polynômes en f $K[f] = \mathrm{Im}\, \varphi_f$.

Prop-Def 17. Il existe un unique polynôme unitaire π_f qui engendre $\mathrm{Ker}\, \varphi_f$: c'est le polynôme minimal de f.

Remarque 18 : Si $\pi_f = P_1 \dots P_n$ (décomposition de π_f en produit de facteurs premiers entre eux 2 à 2 alors on a :
$K[f] \simeq K[X]/\langle \pi_f \rangle \simeq K[X]/\langle P_1 \rangle \times \dots \times K[X]/\langle P_n \rangle$

Théorème 19 : Soit P un polynôme annulateur de f.
Décomposons P en produits de polynômes $P = Q_1 \dots Q_m$ où les Q_i sont 1ers entre eux. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\, Q_i(f)$

Application 20. Décomposition de Dunford. Si χ_f est scindé alors $\exists!\,(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotent tel que $\begin{cases} u=d+n \\ dn=nd \end{cases}$

Prop 21. f est diagonalisable ssi Π_f est scindé à racines simples.

[GOU]

3. DIAGONALISATION PAR BLOCS.

Notation : Si $x\in E$, on note $\Pi_{f,x}$ le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P\in K[X] \mid P(f)(x)=0\}$

Lemme 22 : Il existe $x\in E$ tel que $\Pi_f=\Pi_{f,x}$.

Déf 23 : f est cyclique ssi $\exists x\in E$ tel que $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E (ici $\dim E = n$)

Théorème 24. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $E_1,\dots,E_n$ de sev de E tous stables par f telle que

i) $E=E_1\oplus\dots\oplus E_n$

ii) $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, la restriction $f_i=f|_{E_i}$ de l'endomorphisme f au sev E_i est un endomorphisme de E_i cyclique

iii) Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i, on a $P_{i+1}\mid P_i$ $\forall i$

La suite (P_i) ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. Elle est appelée suite d'invariants de similitude.

Théorème 25 : (Réduction de Frobenius) : Si $P_1,\dots,P_n$ désigne la suite des invariants de similitude de $f\in\mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & \\ & \ddots \\ & & \mathcal{C}(P_n)\end{pmatrix}$ où $\mathcal{C}(P_i)$ est la matrice compagnon de polynôme P_i. De plus $\Pi_f=P_1$

Application 26. Réduction de Jordan

Application 27. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

II. RECHERCHE DE POLYNÔMES ANNULATEURS.

1. POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES.

FGN

Déf 28 : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On définit le polynôme caractéristique comme : $\chi_f(X)=\det(f-X\cdot\mathrm{id})$.

Prop 29. On a $\mathrm{Rac}(\chi_f)$ est égal à l'ensemble des valeurs propres de f

Prop 30. Pour tout λ valeur propre de f, on a en notant α la multiplicité de λ dans χ_f que $\dim(E_\lambda)\le\alpha$.

Thm 31 : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a f diagonalisable ssi

1) χ_f est scindé $\chi_f(X)=(-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$

2) Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ $\dim(E_{\lambda_i})=\alpha_i$

Ex 32. $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ $\chi_A(X)=-(X-1)(X+2)^2$

On a $\dim(E_1)=1$ et $\dim(E_{-2})=\dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right)=2$

Donc A est diagonalisable

Ex 33 : $B=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&1&0\\5&1&3\end{pmatrix}$ $\chi_B(X)=-(X-1)^2(X+2)$

On a $\dim(E_{-2})=1$ et $\dim(E_1)=\dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-5&0&-2\\0&0&0\\5&1&2\end{pmatrix}\right)=1<2$

Donc B n'est pas diagonalisable

Thm 34 (Cayley-Hamilton). Pour tout $f\in\mathcal{L}(E)$ on a $\chi_f(f)=0$.

Ex 35. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP=2A$ alors A est nilpotente

2) Polynômes annulateurs

GOU

Prop 36 Pour tout Q polynôme annulateur de f on a que les valeurs propres de f sont incluses dans les racines de Q.

C-ex 37 : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ alors $Q=\Pi_f\times(X-\omega)$, avec ω pas valeur propre de f, Q est un polynôme annulateur de f mais pas toutes ses racines sont des valeurs propres

Thm 38 : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a f diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Appli 39 Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{R}$-e.v de dim finie, tel que $f^3+f=0$. Alors $\mathrm{rg}\,f$ est pair.

Ex 40 : X^2-X est un polynôme annulateur pour les projecteurs
X^2-1 " " " symétries

Appli 41. Dans E un $\mathbb{F}_q$-e.v on a $f\in\mathcal{L}(E)$ diagonalisable ssi X^q-X est annulateur de f

OA

III Étude de l'ensemble des endomorphismes diagonalisables

1) Diagonalisation simultanée

Prop 42 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E tq $f_i\circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout $i,j\in I$. Si tous les f_i sont diagonalisables. Alors on peut les co-diagonaliser.

Cor 43 La somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est diagonalisable

Appli 44 On a $GL_n(\mathbb{K}) \underset{\text{grp}}{\simeq} GL_m(\mathbb{K}) \iff n=m$

Ex 45 Soient $U,V\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes diagonalisables. Alors $\Phi_{U,V}\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ M \longmapsto UM-MV\end{cases}$ est diagonalisable

OA

2) Topologie des endomorphismes diagonalisables

Notations $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
$D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables
$C_n(\mathbb{K})$ — " — à valeurs propres distinctes
$T_n(\mathbb{K})$ — " — trigonalisables

Rappel En dimension finie les normes sont équivalentes

Prop 46 : Dans $T_n(\mathbb{K})$ on a $\overline{C_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$ et $\mathring{D}_n(\mathbb{K}) = C_n(\mathbb{K})$
(et comme $C_n(\mathbb{K})\subset D_n(\mathbb{K})\subset T_n(\mathbb{K})$ on a $\overline{D_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$)

Rmq 47 $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé distinct de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Gou Appli 48 Pour tout $A,B\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

FG Prop 49 Dans le cas des corps finis on a prouvé que pour q premier ≥ 3

$$|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_q\in\mathbb{N}\\ m_1+\dots+m_q=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

3) Cas particulier des endomorphismes normaux

GRI

Déf 50 Un endomorphisme f d'un espace hermitien est dit normal si $f^*\circ f = f\circ f^*$
Une matrice est dite normale si ${}^t\bar{A}A = A\,{}^t\bar{A}$

Ex 51 Les matrices symétriques réelles, antisymétriques réelles, hermitiennes, orthogonales ou unitaires sont des matrices normales

Lemme 52 Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien. Soit λ une valeur propre de f. Alors E_λ est stable par f^* (et f) et $E_\lambda^\perp$ est stable par f^* et f
De plus $f|_{E_\lambda^\perp}$ est normal

Thm 53 Soit f un endo normal d'un esp hermitien. Alors f est diagonalisable et les sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En particulier on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres

Cor 54 Soit f un endo normal d'un espace euclidien E. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & Z_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & Z_s\end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i\in\mathbb{R} \text{ et } Z_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j\\ b_j & a_j\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$$

Ex 55 Pour les matrices orthonormales la forme obtenue par le corollaire est $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & R_{\theta_1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_{\theta_s}\end{pmatrix}$ où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\end{pmatrix}$

C-ex 56 . Les matrices symétriques complexes ne sont pas forcément normales $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$
. Les matrices antisymétriques complexes aussi $\begin{pmatrix} i & 3i\\ -3i & 2i\end{pmatrix}$