155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Dans toute cette leçon, k désigne un corps (commutatif) et E un k-espace vectoriel de dimension finie n.

I - Généralités sur les endomorphismes diagonalisables

1) Rappels sur les polynômes annulateurs

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
- $\lambda \in k$ est dit valeur propre de f si $f - \lambda id$ n'est pas injectif.
- Dans ce cas, on appelle vecteur propre de f (associé à λ) tout $x \in E \setminus \{0\}$ t.q $f(x) = \lambda x$.
- On appelle spectre de f et on note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Remarque 2 : On a des définitions similaire pour $A \in M_n(k)$. On sera souvent amené à confondre un endomorphisme avec une matrice le représentant.

Définition/Proposition 3 : • On définit le polynôme charactéristique de $A \in M_n(k)$ comme : $\chi_A(X) = \det(A - X I_n) \in k[X]$.
- Deux matrices semblables ont même polynôme charactéristique : pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit χ_f comme le polynôme charactéristique de toute matrice qui le represente.

Définition 4 : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on définit son polynôme minimal comme le générateur unitaire de l'idéal annulateur $\{P \in k[X], P(f) = 0\}$: $\Pi_f \in k[X]$.
On a donc $P(f) = 0 \iff \Pi_f | P \quad \forall P \in k[X]$.

Théorème 5 : [Cayley-Hamilton] $\Pi_f | \chi_f$.

Proposition 6 : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in k$, on a les équivalences :
$\lambda \in Sp(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0 \iff \Pi_f(\lambda) = 0$

Théorème 7 : [Lemme des noyaux] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $P \in k[X]$ et $P = Q_1^{\alpha_1} \dots Q_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit d'irréductibles. Alors $\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}(f)$.
De plus, les projecteurs associés s'expriment explicitement comme des polynômes en f.

2) Définitions et critères de diagonalisabilité

Définition 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in Sp(f)$, on appelle espace propre associé à λ le sous-espace $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda id)$

Proposition 9 : Les E_λ pour $\lambda \in Sp(f)$ sont en somme directe.

Définition 10 : • On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsque E admet une base composée de vecteurs propres pour f, ou encore lorsque $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$.
- On dit que $A \in M_n(k)$ est diagonalisable lorsque A est semblable à une matrice diagonale. Bien sûr, A est diagonalisable ssi elle représente un endomorphisme diagonalisable.

Proposition 11 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes, i.e si χ_f est scindé à racines simples sur k, f est diagonalisable.

On a en fait une caractérisation plus précise :

Théorème 12 : On a les équivalences :
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable
- $\exists P \in k[X]$, P scindé à racines simples t.q $P(f) = 0$
- Π_f est scindé à racines simples.

Exemples 13 : • Un projecteur de $\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable car racine de $X^2 - X$.
- De même pour les symétries, annulées par $X^2 - 1$ (car $\neq 2$)
- Toute matrice de permutation est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ car annulée par $X^{n!} - 1$.

- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynome characteristique X^2+1 : elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$.
- $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est non nulle ($X^2 - tr(f)X$ annule f)
- lorsque $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini, $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi $X^q - X$ annule f.

Corollaire 14 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors l'endomorphisme $\tilde{f} \in \mathcal{L}(F)$ induit par f est diagonalisable.

Théorème 15 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi pour tout $\lambda \in Sp(f)$ $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ multiplicité de la racine λ dans χ_f.

II - Application à la réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation simultanée

Théorème 16 : Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une famille d'endomorphismes diagonalisables, commutant deux à deux ($f_i \circ f_j = f_j \circ f_i \ \forall i,j$). Alors E admet une base formée de vecteurs propres communs à tous les f_i (i.e la matrice de chacun des f_i dans cette base est diagonale).

Corollaire 17 : Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et $f \circ g = g \circ f$, alors $f+g$ et $f \circ g$ sont diagonalisables.

Application 18 : Tout sous-groupe commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$ fini est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

Application 19 : $GL_n(k) \simeq GL_m(k)$ ssi $m = n$. quand $car(k) \neq 2$.

2) Réduction des endomorphismes normaux

On suppose ici $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E euclidien/hermitien.

Définition 20 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

En particulier :
- f est symétrique/hermitien si $f^* = f$
- f est antisymétrique/antihermitien si $f^* = -f$
- f est orthogonal/unitaire si $f^* f = id$.

Théorème 21 : Lorsque $k = \mathbb{C}$, f est normal ssi f est diagonalisable sur une base orthonormée de E.

Corollaire 22 : Lorsque $k = \mathbb{C}$,

f est $\begin{cases} \text{hermitien} \\ \text{antihermitien} \\ \text{unitaire} \end{cases}$ ssi f est diagonalisable sur une base orthonormée, et ses valeurs propres sont $\begin{cases} \text{dans } \mathbb{R} \\ \text{dans } i\mathbb{R} \\ \text{de module } 1. \end{cases}$

Dans $k = \mathbb{R}$, on a seulement une partie du résultat :

Théorème 23 : f est symétrique ssi f est diagonalisable sur une base orthonormée de E.

Application 24 : [Racine carrée d'une matrice]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$ symétrique/hermitienne définie positive, i.e $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe une unique matrice symétrique/hermitienne définie positive S telle que $M = S^2$.

Définition 25 : On note H_n^{++}/S_n^{++} (resp. U_n/O_n) l'ensemble des matrices hermitenne/symétrique définies positives (resp. unitaires/orthogonales)

Application 26 : [Décomposition polaire] On a les homéomorphismes :
$$U_n \times H_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad (P,S) \longmapsto PS \qquad ; \qquad O_n \times S_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad (P,S) \longmapsto PS$$

3) Décomposition de Dunford

Théorème 27 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ t.q χ_f soit scindé sur k.
Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
(i) $f = d+n$ (ii) d diagonalisable, n nilpotent (iii) $dn = nd$.
De plus, d et n s'expriment comme des polynômes en f.

DEV

Remarque 28 : Pour peu qu'on sache scinder χ_f, cette décomposition est effective : on peut exprimer explicitement d comme polynôme en f.

Exemple 29 : $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_M = -(X-2)^2(X-3)$.
On a la relation de Bezout : $-(X-1)(X-3) + (X-2)^2 = 1$.
Les projecteurs sur $\mathrm{Ker}((f-2id)^2)$, $\mathrm{Ker}(f-3id)$ sont donnés par : $-(M-I_d)(M-3I_d)$, $(M-2I)^2$. Ainsi : $D = -2(M-I)(M-3I) + 3(M-2I)^2$

III – Compléments et applications

1) Topologie

On suppose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $M_n(k)$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé.

Définition 30 : On note : $D_n(k) = \{M \text{ diagonalisable}\}$
$D_n^d(k) = \{M \text{ diagonalisable}, |Sp(M)| = n\}$, $T_n(k) = \{M \text{ trigonalisable}\}$

Proposition 31 : $\overline{D_n^d(k)} = T_n(k)$, $\overset{\circ}{D_n(k)} = D_n^d(k)$

Remarque 32 : Dans le cas $k = \mathbb{C}$, $T_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$.
En particulier, $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Application 33 : Preuve du thm de Cayley-Hamilton par densité lorsque $k = \mathbb{C}$.

Application 34 : Dès que $n \geq 2$, l'application qui à $M \in M_n(\mathbb{C})$ associe sa partie diagonalisable D dans la décomposition de Dunford n'est pas continue.

Proposition 35 : • H_n^{++}, S_n^{++} sont connexes par arcs
• U_n est connexe par arcs, O_n a 2 composantes connexes (par arc)
• On en déduit : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ; $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes (par arc)

2) Suites à récurrence linéaire

On s'intéresse aux suites $(u_n) \in k^{\mathbb{N}}$ satisfaisant
$u_{n+1} = a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \dots + a_{p-1} u_{n-p+1}$, $(u_0, \dots, u_{p-1})$ donné.
Posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n-p+1} \end{pmatrix} \in k^p$, on se ramène à $U_{n+1} = A U_n$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}$ matrice compagnon associée à $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$

A est diagonalisable ssi P est scindé à racines simples. Dans ce cas, introduisant les vecteurs propres $X_1, \dots, X_p$ et vap $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et décomposant $U_0 = \mu_1 X_1 + \dots + \mu_p X_p$, on a
$U_n = \mu_1 \lambda_1^n X_1 + \dots + \mu_p \lambda_p^n X_p$ (les X_i importent peu...)

3) Exponentielle de matrice

On suppose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 36 : Pour $M \in M_n(k)$, on définit $\exp(M) = \sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$ (série normalement convergente)

Proposition 37 : Si $AB = BA$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Proposition 38 : • On suppose χ_A scindé (ok si $k = \mathbb{C}$).
Alors A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ l'est.
• A est diagonale ssi $\exp(A)$ est diagonale ($k = \mathbb{R}$)

DEV

Remarque 39 : La décomposition de Dunford permet un calcul effectif de $\exp(A)$ sans véritablement diagonaliser A (en introduisant les projecteurs...)

Références : Gourdon, Algèbre
Grifone, Algèbre linéaire } pour l'essentiel.
Serre, Matrices

Exos :

- A inversible AB diago. alors BA diago
- Condition sur A pour que $\Phi : M \mapsto MA - AM$ soit diago ?
- $B \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples de deg $n+1$
  $A \in \mathbb{R}[X]$ de deg $n+1$
  $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto$ le reste dans la div° $\frac{AP}{B}$
  mq Φ diagonalisable.