155

ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES EN DIMENSION FINIE.

CADRE - Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ev. de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Éléments propres, polynôme caractéristique.

I-1) Éléments propres.

DEF 1 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est dit valeur propre de u si $u - \lambda id_E$ est non injective ie $\exists x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On dit alors que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

REM 2 - On peut identifier $u \in \mathcal{L}(E)$ à sa matrice représentative dans une certaine base de E.

DEF 3 - On définit pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, λ valeur propre de A ssi il existe un vecteur $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.

DEF 4 - Soit λ valeur propre associée à $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ le sev :
$E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$

THM 5 - Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

I-2) Polynôme caractéristique.

DEF 6 - Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$

PROP 7 - Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

DEF 8 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$. On l'appelle polynôme caractéristique de u.

PROP 9 - $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u ssi λ est racine de χ_u.

THM 10 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$.

PROP 11 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F s.ev strict de E (ie $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$) stable par u ($u(F) \subset F$)
Alors $\chi_{u|F}$ divise χ_u.

I-3) Endomorphismes diagonalisables.

DEF 12 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale

REM 13. - Un endomorphisme u est diagonalisable ssi sa matrice dans une base quelconque de E est diagonalisable.

PROP 14. - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples, alors u est diagonalisable.

EX 15. - Si $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ diagonalisable ssi $a = c$ ou $b = 0$.

II - Critères de diagonalisabilité.

II-1) CNS de diagonalisabilité.

THM 16 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et chaque racine λ_i de χ_u est de multiplicité $\dim E_{\lambda_i}$.

iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de u vérifiant $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

iv) $\dim(E) = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p}$ avec $sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

v) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

EX 17 - Les projecteurs et les symétries vectorielles sont diagonalisables (si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$)

CORO 18 - Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et si F sous espace de E stable par u, alors $u_{|F}$ diagonalisable.

II-2) Familles d'endomorphismes diagonalisables.

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est muni d'un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

PROP 19 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ appelé adjoint de u tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

Si B est une base orthonormale de E, alors :

$$\operatorname{Mat}_B(u^*) = {}^t\overline{\operatorname{Mat}_B(u)}.$$

DEF 20 - $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal ssi $uu^* = u^*u$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale ssi $M\,{}^t\overline{M} = {}^t\overline{M}M$.

THM 21 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est normal

ii) u est diagonalisable dans une base orthonormée

iii) u et u^* sont diagonalisables dans une même base orthonormée.

DEF 22 - $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $u = u^*$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $M = {}^tM$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si $M = {}^t\overline{M}$.

THM 23 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle u est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

CORO 24 - Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in M_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors il existe une matrice $C \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale (resp. unitaire) telle que :
$C^{-1}MC = D$ où $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale.

II-3) Codiagonalisabilité

DEF 25 - Une famille finie d'endomorphismes $(f_k)_{k \in [\![1,N]\!]}$ d'un $\mathbb{K}$-ev E est co-diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des f_k admet une matrice diagonale.

PROP 26 - Une famille finie d'endomorphismes diagonalisables est co-diagonalisable ssi pour tout couple $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ f_i et f_j commutent.

III - Considérations topologiques et réduction d'endomorphismes

III-1) Influence du corps de base.

FAIT 27 - La possibilité de diagonaliser dépend du corps de base.

EX 28 - $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \not\equiv 0 \bmod \pi$.

PROP 29 - Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ corps fini à q éléments et E un $\mathbb{K}$ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable ssi $u^q = u$.

APPL 30 - Dénombrement matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$.

DEV 1 $|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_q \\ \sum n_i = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_q}(\mathbb{F}_q)|}$

III-2) Résultats de densité.

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$.

CADRE - $M_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|M\| = \sum |m_{ij}|$.

PROP 31 - $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

REM 32 - Ce résultat est faux sur $M_n(\mathbb{R})$.

PROP 33 - L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.

III-3) Décomposition de Dunford et exponentielle d'endomorphismes.

THM 34 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ où d diagonalisable, n nilpotent qui commutent et :
$u = d + n$. DEV 2

APPL 35 - Calcul puissance / exponentielle d'endomorphismes et de matrices.

EX 36 - Calcul de l'exponentielle de la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

PROP 37 - $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ est diagonalisable.