155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Cadre : E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{K}$, un corps. f est un endomorphisme de E. On confondra souvent f et M sa matrice dans une base β fixée, ce qui justifiera le point de vue matriciel.

I) Outils pour le diagonaliseur.

a) Éléments propres : définitions et résultats.

Définitions 1 : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $x \in E\setminus\{0_E\}$ tel que $f(x)=\lambda x$. Un tel vecteur x est appelé vecteur propre associé à λ.

Remarques 2 : • 0 est valeur propre de f ssi f est non inversible ($\ker f \neq \{0\}$ et $\dim E<\infty$)

• Formulation matricielle : $MX=\lambda X$.

Définitions 3 : • On note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

• Pour $\lambda\in Sp(f)$, $E_\lambda=\{x\in E / f(x)=\lambda x\}$ est appelé sous-espace propre de f associé à λ.

Proposition 4 : Des vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes forment une famille libre.

Corollaire 5 : f admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 6. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe.

Remarque 7 : Un sous-espace propre est stable par f.

b) Polynômes annulateurs, polynôme caractéristique.

Définition 8 : $P\in\mathbb{K}[X]$ est annulateur de f si $P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition 9 : f admet un polynôme annulateur.

Exemple 10 : Le seul endomorphisme admettant $aX+b$, $a\neq 0_{\mathbb{K}}$ comme polynôme annulateur est l'homothétie de rapport $-\frac{b}{a}$.

Définition 11 : f est nilpotent s'il admet un monôme comme polynôme annulateur.

Proposition 12 : L'ensemble $\mathcal{I}_f$ des polynômes annulateurs de f est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

Définition 13 : Le polynôme minimal de f, noté μ_f, est l'unique générateur unitaire de $\mathcal{I}_f$.

Exemples 14 : • Si f est nilpotent, $\exists k\in\mathbb{N}^* / X^k=\mu_f$, k est appelé indice de nilpotence

• Si $f=\lambda id_E$, alors, $\mu_f = X-\lambda$.

• Si $f\notin\{0_{\mathcal{L}(E)}, id_E\}$ est un projecteur, $\mu_f=X^2-X$

• Si $f\neq\pm id_E$ est une symétrie, $\mu_f=X^2-1$.

Remarque 15 : Si F est un sous-espace stable par f, alors $\mu_{f_{|F}} \mid \mu_f$.

Définition 16 : $\chi_f := \det(X id_E - f)$ est appelé polynôme caractéristique de f.

Remarques 17 : Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude (ne dépend pas de la base)

• $\chi_f(0)=(-1)^n\det(f)$; $\chi_f=\chi_{{}^tf}$

Proposition 18 : Si F est un sous-espace stable par f, alors $\chi_{f_{|F}}\mid\chi_f$.

Exemple 19 (matrices non semblables ayant même polynôme caractéristique).

$M=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ vérifient $\chi_M=\chi_N=(X-1)^4$.

Proposition 20 : • $\lambda\in Sp(f)$ est racine de tout polynôme annulateur de f.

• $Sp(f)=Rac(\chi_f)$.

Définitions 21 : Soit $\lambda\in Sp(f)$. On note :

• $m_a(\lambda)$ la multiplicité algébrique : multiplicité de λ en tant que racine de χ_f.

• $m_g(\lambda)$ la multiplicité géométrique : la dimension de E_λ en tant qu'espace vectoriel.

Théorème 22 (Cayley-Hamilton) : $\chi_f(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$

c) Critères de diagonalisabilité.

Définition 23 : • f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.

• M est diagonalisable si M est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 24 : Si χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable.

Exemples 25 : • $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$ sont diagonalisables, mais $A+B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ non.

• $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont diagonalisables, mais $CD=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ non.

Remarque 26 : Si $Sp(f)=\lambda$ et f diagonalisable, alors $f=\lambda id_E$

Théorème 27 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable.

(ii) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall\lambda\in Rac(\chi_f)$, $m_g(\lambda)=m_a(\lambda)$

(iii) $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_r\in Sp(f) / E=\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.

Applications 28 : • Une matrice triangulaire avec ses coefficients diagonaux 2 à 2 distincts est diagonalisable

• Les projecteurs et symétries vectorielles sont diagonalisables.

Théorème 29 : f est diagonalisable ssi μ_f est scindé à racines simple sur $\mathbb{K}$.

Exemple 30 : Si $M^5 = I_n$, et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. De plus, M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi $\mu_M = X-1$ (donc $M = I_n$).

Corollaire 31 : f est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n.

Proposition 32 : Si F est un sous-espace stable par f, et f diagonalisable, alors $f_{|F}$ aussi.

II) Étude de l'ensemble des endomorphismes diagonalisables.

a) Codiagonalisation.

Soient I un ensemble ayant au moins deux éléments, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E.

Définition 33 : Une base β de E est une base commune de diagonalisation pour $(f_i)_{i\in I}$ si c'est une base de vecteurs propres pour chaque f_i.

Théorème 34 : Il existe une base commune de diagonalisation pour $(f_i)_{i\in I}$ ssi ces endomorphismes commutent deux à deux :

$$\forall (i,j)\in I^2,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$$

Corollaire 35 (version matricielle) : Soit $\{A_i \mid i\in I\}$ une famille de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \,/\, \forall i \in I,\ P^{-1}A_iP$ est diagonale ssi les matrices A_i commutent deux à deux.

Application 36 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables. L'endomorphisme

$$\Theta : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto AMB \end{cases}$$ est diagonalisable.

DVPT 1

Application 37 (Décomposition de Dunford) : Supposons χ_f scindé. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d,n) tel que :
- $f = d+n$
- n est nilpotent
- n et d commutent
- d est diagonalisable

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Exemple 38 : $M = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ a pour décomposition : $I_3 + \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) Topologie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dénombrement sur $\mathbb{F}_q$.

On définit : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

$\mathcal{D}_n'(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.

$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 39 : $\mathcal{D}_n'(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque 40 : De manière plus précise, $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 41 :
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A$ est continue.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mu_A$ n'est pas continue.

Théorème 42 : Le nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est :

$$\sum_{\substack{n_1+\dots+n_q=n \\ n_i \geq 0}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}.$$

c) Deux familles d'endomorphismes remarquables.

(i) Endomorphismes auto-adjoints

On suppose ici que E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Définition 43 :
- On note $S_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n.
- On note $S(E) := \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y)\in E^2, \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle\}$.

Théorème 44 : $f \in S(E)$ ssi sa matrice dans une base orthonormée est dans $S_n(\mathbb{R})$.

Théorème 45 (théorème spectral) :
- Si $f\in S(E)$, f se diagonalise dans une base orthonormée.
- Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tPMP$ est diagonale.

Remarque 46 : $M := \begin{pmatrix} 1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Le résultat est faux dans $\mathbb{Q}$.

(ii) Endomorphismes semi-simples.

Définition 47 : f est semi-simple si tout sous-espace vectoriel E stable par u admet un supplémentaire stable par f.

DVPT 2

Théorème 48 (Diagonalisabilité et semi-simplicité) :

1) Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos ; f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable.

2) f est semi-simple si et seulement si μ_f est sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 49. Si f est semi-simple, alors pour tout $F\subset E$ sous-espace vectoriel stable par f, $f_{|F}$ est semi-simple.

Remarque 50 : Si $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos, on a une autre décomposition de Dunford, où d n'est plus diagonalisable, mais semi-simple.

III) 1) Diagonalisation et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On cherche à résoudre le système différentiel sous forme matricielle :

$$(E) : \frac{dY}{dt} = MY .$$

a) Exponentielle de matrices.

Définition 51. $\exp(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$ est appelée exponentielle de la matrice M.

Propriété 52 : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Contre-exemple 53 : $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $AB \neq BA$ et $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$

Proposition 54 : $\det(e^A) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Proposition 55 : Si M est diagonalisable ($M = PDP^{-1}$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$) dans $\mathbb{K}$, alors $\exp(M) = P\,\mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) P^{-1}$.

Remarque 56 : Cette proposition simplifie la résolution de (E) dans le cas M diagonalisable.

b) Résolution de (E).

Théorème 57 : $\frac{d}{dt}(e^{tM}) = M . e^{tM} = e^{tM} . M$.

Théorème 58 : La solution Y de (E) telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)M} . V_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Corollaire 59 : Si M est diagonalisable, soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de M, de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; la solution générale est donnée par :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} . V_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} . V_n \quad ; \alpha_j \in \mathbb{K} .$$

c) Mise en œuvre : cas diagonalisable.

Pour résoudre (E), on peut procéder :

i) On diagonalise M ; $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, D diagonale / $M = PDP^{-1}$;

ii) On résout le système (E') : $\frac{dX}{dt} = DX$;

iii) On revient à Y par $Y = PX$.

Application 60 : Le système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

Développements : 1) Décomposition de Dunford

2) Diagonalisabilité et semi-simplicité.

Bibliographie :

- *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné ;
- *Les Maths en tête, Algèbre*, Xavier Gourdon ;
- *Les contre-exemples en mathématiques*, Bertrand Hauchecorne
- *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi
- *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly
- *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone.