Exponentielle de Matrices. Applications.

156

Cadre: On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre. $n \in \mathbb{N}$.

I. Généralités

A. Définitions et premières propriétés

prop 1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\sum_{k\geq 0} A^k/k!$ Converge normalement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déf. On note $\exp(A)$ ou e^A la somme de cette série.

prop 2 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\|\exp A\| \leq e^{\|A\|}$

Ex: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \nabla \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \nabla \\ (0) & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

prop 3: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

(i) $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$. En particulier $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

(ii) $e^{{}^tA} = {}^t(e^A)$; $e^{\bar{A}} = \overline{e^A}$; $e^{A^*} = (e^A)^*$

(iii) $P^{-1} e^A P = e^{P^{-1}AP}$

csqce: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

(iv) $\exists P_A \in \mathbb{K}[X] \setminus \exp(A) = P(A)$

(v) $f: t \mapsto e^{tA}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(t) = A^n e^{tA}$

Rq: (i) on n'a pas toujours $e^A e^B = e^{A+B}$

CEx: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors: $e^A e^B = (I_2 + A)(I_2 + B) \neq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{A+B}$

(ii) $t \mapsto X(t)$ C^1. on n'a pas toujours: $(e^{X(t)})' = X'(t) e^{X(t)}$

B_ Calcul de l'exponentielle

1_ Cas diagonalisable: $A = PDP^{-1}$ $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

- Si P est connue: alors $e^A = P e^D P^{-1}$
- Sinon: soit Π un polynôme (celui de Lagrange par exemple) tel que $\Pi(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ $\forall i$. Alors $e^A = \Pi(A)$

2_ Cas quelconque.

théo 4. (Dunford). $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que son polynôme caractéristique **soit scindé** sur $\mathbb{K}$, Alors $\exists! (D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tq:

(i) $A = D + N$ (ii) D diago et N nilpo. (iii) D et N commutent

(iv) D et N sont des polynômes en A.

Appli: Soit $F = \Pi(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ un polynôme annulateur de P.

On décompose $1/F$ en éléments simples: $1/F = \sum_{i=1}^{r} \frac{U_i(X)}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$

On note $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$

On pose $p_i = U_i Q_i(P)$

Alors on a: $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ et $n = \sum_{i=1}^{r} (P - \lambda_i \mathrm{id}) p_i$

et $\exp(P) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(P - \lambda_i \mathrm{id})^p}{p!} p_i$

Ex: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $(A - Id)^2 (A - 2Id) = 0$

Alors $e^A = -e^2 A(A - Id) + eA(A - 2Id)^2$

prop5 (Dunford d'une exponentielle). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant la décomposition de Dunford $A = D + N$.

Soit N' tq $e^N = I + N'$.

Alors $e^D + e^D N'$ est la décomposition de Dunford de e^A.

Cor6 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A diago $\Leftrightarrow$ e^A diago.

Appli $e^A = I_n \Leftrightarrow A$ diago et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

II. Propriétés de l'exponentielle

Rq: l'exponentielle n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a par exemple: $\forall k \in 2i\pi\mathbb{Z}$ $\exp\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = I_2$.

A_ Inversion de l'exponentielle.

1) Inversion locale

théo 7. $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ est C^∞.

prop 8. exp est un C^1-difféomorphisme local en 0. On a de plus: $d\exp_0 = Id$.

Applis: (i) le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ n'admet pas de sg arbitrairement petit.

(ii) Tout morphisme continu $(\mathbb{R}, +) \to GL_n(\mathbb{R})$ est de la forme $t \mapsto e^{tA}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier il est C^∞.

2| Le logarithme matriciel.

Déf/prop 9. $A \in B(I,1) \subset GL_n(K)$. On appelle $\log A$ la somme de la série absolument convergente $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(A-I)^n}{n}$

prop. $\forall A \in B(I,1)$, $\exp \log A = A$

Rq: Le logarithme est défini sur l'ensemble des matrices unipotentes $\mathcal{U} = \{Id + n,\ n \text{ nilpotente}\}$ car alors la somme est finie.

Théo 10 L'exponentielle réalise un homéomorphisme de l'ensemble des matrices nilpotentes vers l'ensemble des matrices unipotentes.

3| Quelques autres homéomorphismes remarquables.

théo 11 $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ sont des homéomorphismes.

Appli: Grâce à la décomposition polaire, on obtient:

(i) $GL_n(\mathbb{R}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$

(ii) $GL_n(\mathbb{C}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

(iii) $O(n,\mathbb{C}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O(n) \times A(n)$ où $A(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$

(iv) $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

4| Un domaine d'inversion de l'exponentielle ($K = \mathbb{R}$)

Déf. $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, on note $Ad\,A$ l'endomorphisme suivant:
$Ad\,A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad M \mapsto AMA^{-1}$.
On définit aussi l'endomorphisme $ad\,A$ par la formule suivante:
$ad\,A : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ $\quad X \mapsto [A,X] = AX - XA$.

prop 12 $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$, on a: $\exp(ad\,M) = Ad(\exp M)$

[DEV]

Théo 13 (différentielle de l'exponentielle). Soient $M, H \in \mathcal{M}_n(K)$.
Alors: $d\exp_M(H) = e^M \dfrac{Id - e^{-ad\,M}}{ad\,M}(H)$

où: $\dfrac{Id - e^{-f}}{f} = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{(m+1)!} f^m \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$

Cor 14 $d\exp_M$ est inversible ssi $ad\,M$ n'a aucune valeur propre de la forme $2in\pi$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)

On considère $\mathcal{E}$: l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les vp λ_i vérifient $|\mathrm{Im}\,\lambda_i| < \pi$.

Rq: $\mathcal{E}$ est un ouvert étoilé en 0 donc connexe/arcs.

Théo 15. $\exp : \mathcal{E} \to \exp(\mathcal{E})$ est un difféomorphisme.
$\exp(\mathcal{E})$ est un voisinage ouvert de Id dans $GL_n(\mathbb{R})$ contenant la boule $B(Id,1)$.

Cor: $\exp S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme.

B- Surjectivité de l'exponentielle.

1- surjectivité dans $\mathbb{C}$

prop 17. $M \in GL_n(\mathbb{C})$. $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tq $M = \exp(P(M))$

Théo 18 $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Applis: (i) $p \geq 2$. $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $A = B^p$
(ii) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Rq. théo 18 est faux pour $K=\mathbb{R}$ (car $GL_n(\mathbb{R})$ non connexe par ex).

2| Surjectivité dans $\mathbb{R}$

Théo 19. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{M^2,\ M \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est surjective.

[DEV]

Rq: La décomposition de Jordan donne le résultat suivant:
Théo Une matrice réelle inversible est un carré ssi dans chacun de ses tableaux de Young relatifs aux (éventuelles) valeurs propres négatives, les lignes d'une même longueur sont en nombre pair.

Ex: • $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas une exponentielle de matrice mais $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ l'est.

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de vp réelles donc c'est une exponentielle de matrice.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a ses vp positives donc c'est une exponentielle de matrice.

III. Applications.

A. Système différentiel linéaire

prop $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le système $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Z_0 \end{cases}$ [1] admet pour unique solution globale la fonction : $\varphi : t \mapsto e^{tA} Z_0$.

Déf Soit $Y(t,z)$ une solution du système précédent qui vérifie $Y(0) = z$.

- $Y(t, z_0)$ est dit stable si " $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: si $|z - z_0| < \delta$, on a alors : $\forall t \geq 0$, $|Y(t,z) - Y(t,z_0)| < \varepsilon$ "
- $Y(t, z_0)$ est dit asymptotiquement stable si : " il existe $\delta > 0$ tq si $|z - z_0| < \delta$, alors :
  (i) $Y(t,z)$ est définie pr $t \geq t_0$
  (ii) $\lim_{t \to \infty} Y(t,z) = z_0$ "

théo. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vp de A. Alors :

- les solutions sont asymptotiquement stables si : $Re(\lambda_i) < 0$, $\forall i$
- les solutions sont stables si $\forall i$: $Re(\lambda_i) < 0$ ou $Re(\lambda_i) = 0$ et $\dim E_{\lambda_i} = \text{mult}(\lambda_i)$

Ex: cf figure.

B. Sous-groupes fermés de $GL_n(K)$

Déf. Soit G un sg fermé de $GL_n(K)$. On note $\mathfrak{g}$ l'ensemble : $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(K) \mid \exp(tX) \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$

Lemme. $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(K)^2$,

- $\exp(X+Y) = \lim_{n \to \infty} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n$
- $\exp([X,Y]) = \lim_{n \to \infty} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\exp\left(-\frac{X}{n}\right)\exp\left(-\frac{Y}{n}\right)\right)^{n^2}$

Prop. $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$ stable par le crochet de Lie.

théo [Cartan Von-Neumann]

- $\exists V$ voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ et W voisinage de I_n dans G tel que $\exp : V \to W$ soit un C^1 difféomorphisme.
- Tout sg fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

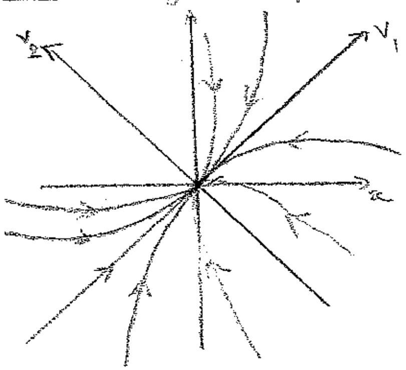
Rq.

- La dimension de la sous-variété vaut $\dim \mathfrak{g}$
- Si G est connexe, $\exp \mathfrak{g}$ engendre G
- L'espace tangent en I_n est $\mathfrak{g}$.

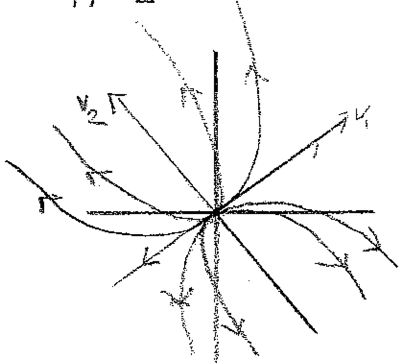
Appli:

- $SO_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$, et $T_{SO_n(\mathbb{R})}(I_n) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{{}^tM = -M\}$
- $SL_n(K)$ sous-variété de K^n et $T_{SL_n(K)}(I_n) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid Tr(M) = 0\}$

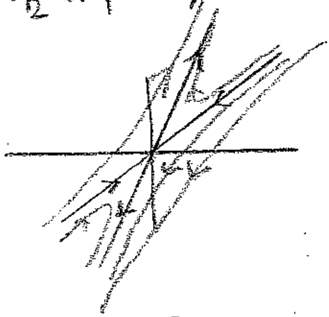
Cas 1 : A a 2 vp distinctes λ_1, λ_2



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, noeud stable.

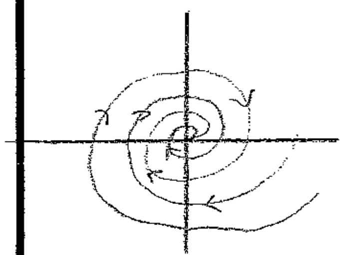


$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, noeud instable

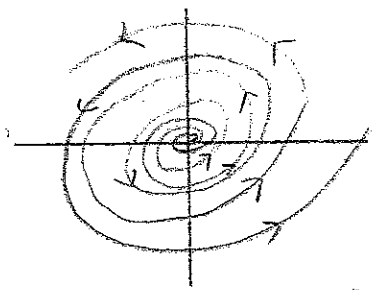


$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: selle

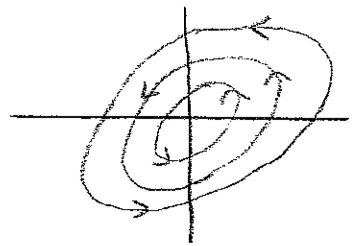
Cas 2 : A a 2 vp non réelles, conjuguées.



Re $\lambda < 0$, foyer stable

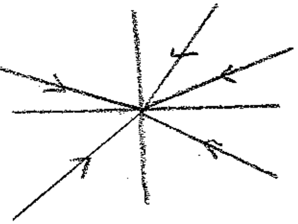


Re $\lambda > 0$, foyer instable

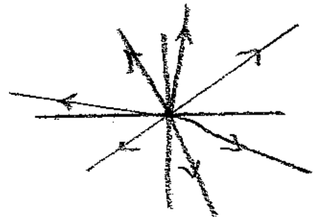


Re $\lambda = 0$, centre

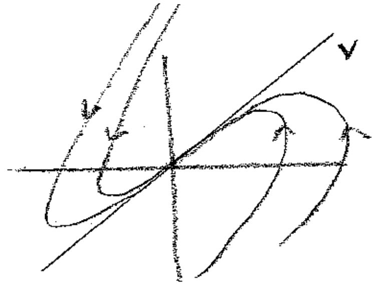
Cas 3 : A a une vp réelle double λ.



$\lambda < 0$, dim $E_\lambda = 2$, puits



$\lambda > 0$, dim $E_\lambda = 2$, source



$\lambda < 0$, dim $E_\lambda = 1$, noeud dégénéré stable

$\lambda > 0$, dim $E_\lambda = 1$, noeud dégénéré instable

ALLURE DES TRAJECTOIRES DU SYSTÈME $\dot{Y} = AY$, ac $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$