156

EXPONENTIELLE DE MATRICES - APPLICATIONS.

CADRE: Dans toute cette leçon, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre que l'on note $\|\ \|$.

I/ Généralité sur les exponentielles de matrices

A) Définition et premières propriétés [GRIF] p.373-375

Prop: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série de matrices $\sum_{n \geq 0} A^n/n!$ est normalement, donc absolument convergente.

Déf: La somme de cette série se note $\exp(A)$ ou e^A et est appelée exponentielle de la matrice A.

Prop: Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\|\exp(A)\| \leq e^{\|A\|}$

Ex: Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Prop: Si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, on a alors $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

Contre-ex: Si pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\exp(A)\exp(B) = (A + I_2)(B + I_2) \neq \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\exp(A+B)} =$

*Prop: Si A et B sont deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $B = P^{-1}AP$, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables et vérifient $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

Cor: Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a la relation $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)}$

APP: Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice réelle, on a alors $\det(M) > 0$. La réciproque est fausse. ← [GOU1] p.186

* Cor: Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et son inverse est $\exp(-A)$.

Prop: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est un polynôme en A. [GOU1] p.189

B) Calcul pratique de l'exponentielle d'une mat.

THM (décomposition de Dunford). Soit E un $\mathbb{K}$-ep. vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique couple d'endomorphismes $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant les conditions suivantes: [ENS9] p.112-116

(i) $f = d + n$ (ii) d et n commutent

(iii) d est diagonalisable et n est nilpotent.

De plus, d et n sont des polynômes en f.

APP: Si $D + N$ est la décomposition de Dunford de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si on note $N' := \sum_{k=1}^{n-1} N^k/k!$, alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est est $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)N'$.

Prop: Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ est diagonalisable. [ENS9] p.116

Cor: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\exp(A) = I_n$ si et seulement si A est diagonalisable et vérifie $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Ex: Voici un exemple de calcul d'une exponentielle. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (décomposition de Dunford).

On a alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$

$$= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Prop: Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\lim_{t \to +\infty} \exp(tM) = 0$ si et seulement si pour toute valeur propre λ de M, on a $Re(\lambda) < 0$. [GOU1] p.200

REF ? **Rem:** Remarquons par la décomposition de Jordan d'une matrice que le calcul de l'exponentielle peut se faire par blocs : * diagonalisable

Prop: Si on connait les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si P est un polynôme d'interpolation de Lagrange vérifiant pour chaque $i \in [\![1;n]\!]$, $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, alors $\exp(A) = P(A)$.

II/ Propriété de la fonction exponentielle

A) Différentiabilité de l'exponentielle

[MNTE] p.59 **Prop:** L'exponentielle matricielle $\exp : \mathcal{M}_n(K) \to GL_n(K)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $d(\exp)_0 = I_n$

Cor: La fonction exp réalise donc un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(K)$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(K)$.

APP. $GL_n(K)$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit. Autrement dit, il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(K)$ tel que $\{I_n\}$ soit le seul sous-groupe de $GL_n(K)$ contenu dans V.

APP: Pour tout morphisme continue de groupes $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(K)$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi(t) = \exp(tA)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. En particulier, l'application φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

[GRF] p.375 * **Prop:** Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$ où pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, A_i est une matrice carrée à coefficients dans K,

on a alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp(A_r) \end{pmatrix}$.

THM (différentielle de l'exponentielle) [ADMS]: On considère ici le cas $K = \mathbb{R}$. Si pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $ad_X : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XH - HX$, on a alors pour tous $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(\exp)_X(H) = \exp(X) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-ad_X)^n(H)$ [ROUV] p.306-309

B) Injectivité et surjectivité de la fonction exp.

DVP [ZAVI] p.49-53 **THM:** Si pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{C}[A] = \{P(A) : P \in \mathbb{C}[X]\}$, et $U = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, on a alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = U$. En particulier, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$, ce qui nous dit que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Cor: Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, il existe alors $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que l'on ait $A = B^k$. *

Prop: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(M)$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Autrement dit, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2 : A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Ex: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle. Par contre, si A est une matrice carrée réelle, alors $\begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ est l'exponentielle d'une matrice réelle.

Rem: L'application exp n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(K)$: On le voit pour $k \in \mathbb{Z}$ avec les matrices $\begin{pmatrix} 2ik\pi & 0 \\ 0 & 2ik\pi \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$. [MNTE] p.58

---

* **APP:** $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

[ENS2] p.116 **Prop:** La restriction de la fonction exponentielle à l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est injective.

[MNTE] p.60 **THM:** Si pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{N}_p$ l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre p de $\mathcal{M}_n(K)$ et $\mathcal{U}_p$ l'ens. des matrices unipotentes d'ordre p dans $\mathcal{M}_n(K)$, alors l'exponentielle réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{N}_p$ et $\mathcal{U}_p$.

[MNTE] p.61 **THM.** L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

III/ Application à l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

[DEMA] p.202 **Prop:** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$.

Co: Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifient $\exp(tA) = \exp(tB)$, alors nécessairement $A = B$

[DEMA] p.201 **THM:** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors le système différentiel linéaire $Y'(t) = AY(t)$ ayant pour condition initiale $Y(t_0) = V_0 \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution: $Y(t) = \exp((t-t_0)A)\, V_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

[DEMA] p.281-282 **Déf:** Notons $Y(t,Z)$ la solution du système différentiel du théorème précédent pour $Z \in \mathbb{R}^n$ la condition $Y(t_0, Z) = Z$

* On dit que la solution $Y(t,V_0)$ est stable s'il existe $r>0$ et $C\geq 0$ tels que pour tout $Z \in \overline{B}(V_0,r)$, $t \mapsto Y(t,Z)$ est définie sur $[t_0;+\infty[$ et vérifie pour tout $t \geq t_0$ $\|Y(t,Z) - Y(t,V_0)\| \leq C\|Z - V_0\|$
* La solution $Y(t,V_0)$ est dite asymptotiquement stable si il existe $r>0$ et une fonction $\gamma : [t_0;+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0$ telle que pour tout $Z \in \overline{B}(V_0,r)$ et tout $t \geq t_0$, on ait : $\|Y(t,Z) - Y(t,V_0)\| \leq \gamma(t)\,\|Z - V_0\|$.

[DEMA] p.284 **THM:** Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons le problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t)$ avec condition initiale.

(i) Les solutions sont asymptotiquement stables si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ $\forall j \in [\![1;r]\!]$

(ii) Les solutions sont stables si et seulement ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ et le bloc associé est diagonalisable.

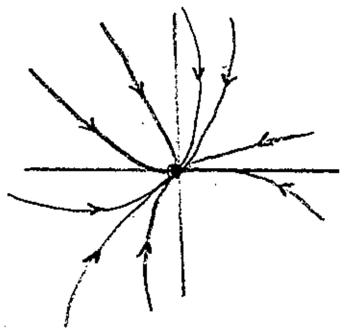
Ex: Le cas de la dimension 2 ($\to$ cf annexe).

RÉFÉRENCES:

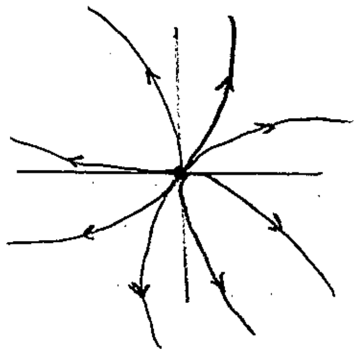
* [GRIF] : J. Grifone - Algèbre linéaire (4e édition)
* [GOU1] : X. Gourdon - Les maths en tête / Algèbre (2e éd)
* [ENS2] : S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas - Oraux X-ENS / Algèbre 2
* [MNTE] : R. Mneimné, F. Testard - Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.
* [ROUV] : F. Rouvière - Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e)
* [ZAVI] : M. Zavidovique - Un max de maths.
* [DEMA] : J-P. Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (3e édition)

ANNEXE / Allure des trajectoires du système $Y'(t) = A\,Y(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ [DEMA] - p. 290-294

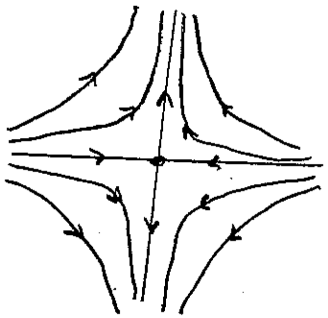
- **Cas 1** : A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2



↳ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
(noeud stable)

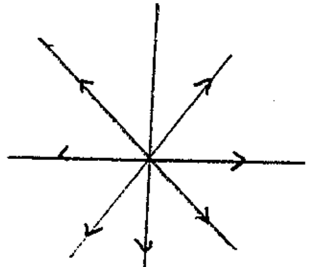


↳ $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
(noeud instable)

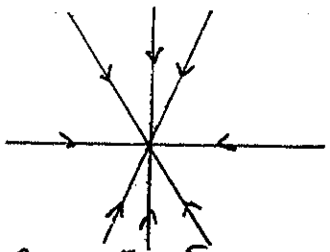


→ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
(col instable)

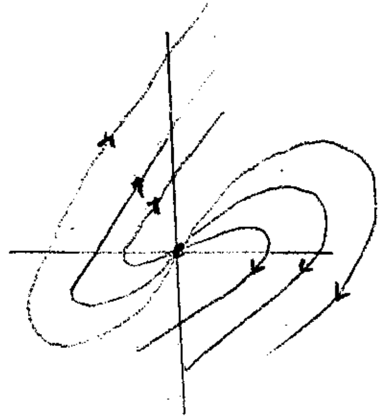
- **CAS 2** : A a une valeur propre réelle et double λ.



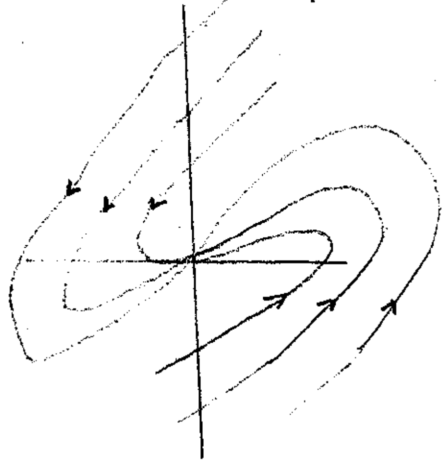
↳ $\lambda > 0$, $\dim E_\lambda = 2$
(noeud propre instable)



↳ $\lambda < 0$, $\dim E_\lambda = 2$
(noeud propre stable)

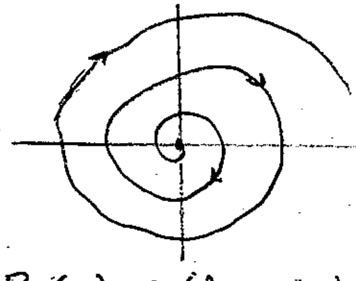


↳ $\lambda > 0$ et $\dim(E_\lambda) = 1$
(noeud exceptionnel instable)

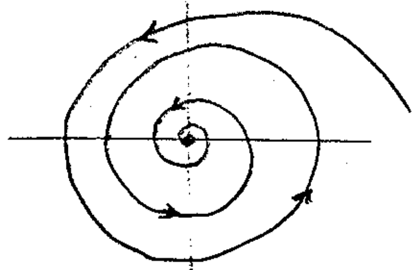


↳ $\lambda < 0$ et $\dim E_\lambda = 1$
(noeud exceptionnel stable)

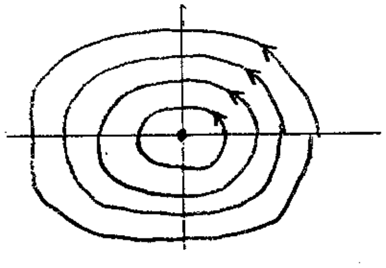
- **Cas 3** : A a deux valeurs propres non réelles λ et $\bar{\lambda}$.



↳ Re( ) > 0 (foyer instable)



↳ $Re(\lambda) < 0$ (foyer stable)



→ $Re(\lambda) = 0$
(centre)

Décomposition de Dunford

Antoine Louazel et Zoïs Moitier

8 mars 2015

Référence : S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 2*. Cassini. p.112-114.

Théorème. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E, dont le polynôme caractéristique est scindé sur K. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que :*
- *$u = d + n$,*
- *d et n commutent,*
- *d est diagonalisable et n est nilpotent,*
- *d et n sont des polynômes en u.*

Démonstration. Montrons d'abord l'existence du couple (d, n). Écrivons

$$\chi_u = \prod_{s=1}^{r} (X - \lambda_s)^{m_s}$$

avec $r \geq 1$, les $\lambda_s \in K$ deux à deux distincts et $m_s \geq 1$. D'après le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, E est somme directe des sous espaces caractéristiques $F_s = \ker(u - \lambda_s \operatorname{Id})^{m_s}$:

$$E = \bigoplus_{s=1}^{r} F_s$$

Soit d l'endomorphisme de E dont la restriction à F_s est $\lambda_s \operatorname{Id}$, d est diagonalisable. Posons $n = u - d$. Comme chaque sous espace caractéristique de E est stable par u et d, il est stable par n. Si on note n_s la restriction de n dans F_s, on a $u_s = d_s + n_s$ et $d_s = \lambda_s \operatorname{Id}$. Par définition de F_s, on a $n_s^{m_s} = (u_s - \lambda_s \operatorname{Id})^{m_s} = 0$. Donc n_s est nilpotente et commute avec d_s. D'où n est nilpotente et commute avec d.
Montrons que d et n sont des polynômes en u. Pour tout s la projection π_s sur F_s parallèlement à la somme des autre sous espaces caractéristiques est un polynôme en u. Or par construction on a pris

$$d = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s \pi_s \in K[u]$$

Montrons l'unicité. Par l'absurde, supposons qu'il existe un autre couple (d', n') répondant au problème. On a alors $d - d' = n - n'$. Comme d' commute avec n', il commute avec u et donc avec tout polynôme en u. En particulier, il commute avec d. Ainsi d et d' sont codiagonalisable et donc $d - d'$ est diagonalisable. De même n commute avec n' d'où $n - n'$ est nilpotent. Or le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul. Donc $d = d'$ et $n = n'$. □

Application. La décomposition de Dunford de e^A et $(\mathrm{e}^D, \mathrm{e}^D(\mathrm{e}^N - I_n))$ ou (D, N) est la décomposition de Dunford de A.

Démonstration. Posons $A = D + N$ où (D, N) est la décomposition de Dunford de A. Comme D et N commutent, on a $e^A = e^D e^N$. Posons $e^N = I_n + N'$ où

$$N' = e^N - I_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

La matrice N' est nilpotent car $N' = NP(N)$ où P est un polynôme. La matrice e^D est diagonalisable car D est diagonalisable. Comme e^D et e^N commutent, N' commute avec e^D. L'écriture $e^A = e^D + e^D N'$ est la décomposition de Dunford de e^A car $e^D N'$ est nilpotent et commute avec e^D $\square$

Application. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $e^A = I_n$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dont le spectre est inclut dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. En reprenant les notations de la preuve précédente on a $e^A = e^D + e^D N' = I_n$, soit avec l'unicité de la décomposition de Dunford, $e^D = I_n$ et $e^D N' = 0$. Comme e^D est inversible, on doit avoir $N' = 0$. Or $N' = NP(N)$ et le coefficient constant de P est 1, donc $P(N)$ est inversible d'où $N = 0$. En effet, dans une base trigonalisant N on obtient que $P(N)$ est unipotente. Donc A est diagonalisable, en se plaçant dans une base de diagonalisation, on vois que

$$e^{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) = I_n$$

Donc pour tout s, $e^{\lambda_s} = 1$ soit $\lambda_s \in 2i\pi\mathbb{Z}$. $\square$

Surjectivité de l'exponentielle

Antoine LOUAZEL et Zoïs MOITIER

8 mars 2015

Référence : M. ZAVIDOVIQUE, *Un Max de Maths.* Broché. p.49-53.

Nous alons avoir besoin d'un lemme sur les groupes topologiques j'en rappelle la définition :

Définition. Un groupe topologique est un triplet $(G, \cdot, \mathcal{T})$ où $(G, \cdot)$ est un groupe, $(G, \mathcal{T})$ est un espace topologique, et ces deux notions sont compatibles : les applications $(g, h) \mapsto gh$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues.

Lemme. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G contenant un voisinage du neutre e de G. Alors H est ouvert et fermé dans G.*

Démonstration. Montrons que H est ouvert. Soit V le voisinage ouvert de e tel que $V \subset H$. Si on note $\varphi : g \mapsto h^{-1}g$ qui est continue, on a que $\varphi^{-1}(V) = hV$ donc hV est ouvert et est un voisinage de h. Donc H est ouvert.
Montrons que H est fermé. On a que $G = \bigcup_{g\in G} gV$ et $H = \bigcup_{h\in H} hV$. Donc $H^c = \bigcup_{g\notin H} gV$, en effect si $g \notin H$, $gV \subset H^c$ car s'il existe $gv \in H$, alors on aurait $g \in H$. Or gV est ouvert pour tout g donc H^c est ouvert et H est donc fermé. $\square$

Théorème. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. on note*

$$\mathbb{C}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{C}[X]\} \quad et \quad U = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = U$. En particulier, $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}[A]$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc fermé. Pour toute matrice $M \in \mathbb{C}[A]$, comme e^M est une limite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$, on a $\mathrm{e}^M \in \mathbb{C}[A]$. De plus e^M est inversible d'inverse $\mathrm{e}^{-M} \in \mathbb{C}[A]$.
Pour $M \in U$, M est inversible d'où $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$, et donc $(U, \times)$ est un groupe.
Comme tout les éléments de $\mathbb{C}[A]$ commutent, on en déduit que exp induit un morphisme du groupe $(\mathbb{C}[A], +)$ dans le groupe $(U, \times)$.
On va montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et fermé de U en utilisant le lemme. On sait que l'application exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que sa différentielle en $0 \in \mathbb{C}[A]$ est $\mathrm{D}\exp(0) = I_n$ (en écrivant $\mathrm{e}^H = I_n + H + o(\|H\|)$) qui est inversible. Donc d'aprés le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert V_0 de $0 \in \mathbb{C}[A]$ et un voisinage ouvert V de $I_n \in U$ tel que $\exp_{|V_0} : V_0 \mapsto V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Par le lemme précédent avec $G = U$, $H = \exp(\mathbb{C}[A])$ et $V \subset H$ voisinage ouvert de I_n, on a que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et fermé dans U.
Montron que U est connexe. Soient $M, N \in U$ et $f : z \mapsto zM + (1 - z)N$ défini sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}[A]$. Le polynôme $\det(f(z))$ s'annule sur un ensemble Z fini, et Z ne contient pas 0 et 1. Or $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs il existe $\gamma : [0; 1] \mapsto \mathbb{C} \setminus Z$ continue tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. Ainsi $f \circ \gamma : [0; 1] \mapsto U$ est un chemin continu qui relie N à M. Donc U est connexe par arcs et donc connexe.
Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non vide, ouvert et fermé dans U connexe, d'où $\exp(\mathbb{C}[A]) = U$. $\square$

Corollaire. *Si* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$, *alors il existe* $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $A = B^k$.

Démonstration. On a que $A \in U$, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \mathrm{e}^{P(A)}$, et donc $B = \exp\left(\frac{P(A)}{k}\right)$ convient. □

Application. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \mathrm{e}^M$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

Démonstration. ($\Longrightarrow$) est évident en prenant $B = \exp\left(\frac{M}{2}\right)$.
($\Longleftarrow$) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Or $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = \mathrm{e}^{Q(B)}$. Mais B est réelle donc $B = \overline{B} = \overline{\mathrm{e}^{Q(B)}} = \mathrm{e}^{\overline{Q(B)}}$. On obtient alors

$$A = BB = B\overline{B} = \mathrm{e}^{Q(B)}\,\mathrm{e}^{\overline{Q(B)}}$$

Or $Q(B)$ et $\overline{Q(B)}$ commute et $Q(B) + \overline{Q(B)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En posant $M = Q(B) + \overline{Q(B)}$, on a $A = \mathrm{e}^M$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □