exp mat : prolongement exp de $\mathbb{R}$, calcul de certains cas (diag) prop importantes

156 Exponentielle de matrices, exemples et applications.

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|$ norme d'algèbre.

I - Définitions et généralités ; 1) La série exponentielle

Def 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$

Rq 2 : Cette série entière a un rayon de convergence infini.

Rq 3 : $\|\exp(M)\| \leq \exp(\|M\|)$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ex 4 : $\exp(O_n) = I_n$; $\exp(I_n) = e I_n$.

Prop 5 : $M \mapsto \exp(M)$ est continue.

Prop 6 : Si M et N commutent, $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$

Ctre ex 7 : Si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\exp(M+N) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ e & e \end{pmatrix}$ et $\exp(M)\exp(N) = \begin{pmatrix} e\cos 1 & e(\cos 1 - \sin 1) \\ e \sin 1 & e(\sin 1 + \cos 1) \end{pmatrix}$

Prop 8 : Si $P \in GL_n(K)$, $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

Appli 9 : Si $A = P^{-1}DP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Rightarrow \exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ et $\exp(A) = P^{-1}\exp(D)P$.

Prop 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable de dérivée $t \mapsto Ae^{tA}$

Prop 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\{e^{tA}, t \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$

Prop 12 : $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(CG) **Prop 13** : $Sp(\exp(A)) = \exp(Sp(A))$.

Ex 14 : $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$; $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$Sp(A) = \{\pm i\theta\}$; $Sp(\exp(A)) = \{e^{\pm i\theta}\}$.

Cor 15 : $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

Prop 16 : $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.

Cor 17 : $\exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n(\mathbb{R})$.

(CG) **Prop 18** : $\exp : (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +) \to (GL_n(\mathbb{C}), \times)$ est un morphisme de groupes.

Prop 19 : exp n'est pas injective.

Ctre ex 20 : $\exp\begin{pmatrix} 0 & 2k\pi \\ -2k\pi & 0 \end{pmatrix} = Id$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ [CG].

2) Lien avec les polynômes.

Prop 21 : $\exp(A)$ est un polynôme en A. [Zav]

Prop 22 : A diagonalisable $\Rightarrow$ A est un polynôme en $\exp A$. [FGN]

Ctre ex 23 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un polynôme en $\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$

th 24 : exp est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables. [FGN].

th 25 : exp est un homéomorphisme de S_n dans S_n^{++}.

Rq 26 : Une application suivra.

3) Calculs d'exponentielles.

calcul + facile

Prop 27 : Si N est nilpotente d'ordre k, $\exp(N) = \sum_{i=0}^{k} \frac{N^i}{i!}$

th 28 : (Décomp de Dunford). Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a un polynôme caractéristique scindé sur K, alors il existe D et N, D diagonalisable, N nilpotente, qui commutent et sont des polynômes en A telles que $A = D + N$.

Appli 29 : Si $A = D + N$ décomposition de Dunford, alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ "facile" à calculer.

Ex 30 : (Méthode pratique) Si χ_A est le polynôme caractéristique de A [Gou]

$\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{r_i}$, on décompose $\frac{1}{\chi_A} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j} \right)$

puis on note $U_i = \sum_{j=1}^{r_i} a_{i,j}(X-\lambda_i)^{r_i - j}$ et $Q_i = \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)^{r_j}$

Finalement on note $P_i = U_iQ_i(A)$. Alors $D = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i$ et $N = A - D$.

ex Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ alors $P_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Et de plus : $\exp(A) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \left(\sum_{p=0}^{r_i - 1} \frac{(A - \lambda_i I_n)^p}{p!} \right) P_i$.

4 : Avec la même matrice M, on trouve $\exp(M) =$

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} -6e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & 10e^2-6e^3 \\ -6e^2+3e^3 & -3e^2+4e^3 & 9e^2-6e^3 \\ -7e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & 11e^2-6e^3 \end{pmatrix}$$

[FGN] **Appli 31** : $\exp^{-1}(\{I_n\})$ est l'ensemble des matrices dont le spectre est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Prop 32 : Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ par blocs, $\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & 0 \\ 0 & \exp(A_2) \end{pmatrix}$

(Gou) **th 33** : Soit A telle que χ_A soit scindé, alors il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix} P$, $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{\alpha_i}(K)$.

Que l'on peut réécrire : $A = \tilde{P}^{-1}\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_s} \end{pmatrix}\tilde{P}$

avec $J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, les (λ_i) sont les valeurs propres.

Appli 34 : $\exp(tJ_{\lambda_i}) = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{p-1}/(p-1)! \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$

ce qui permet de calculer.

II - Aspects analytiques.

1) Différentiabilité de l'exponentielle

(Rou) **th 35** : L'exponentielle est différentiable de différentielle

$$D\exp(A)H = e^A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\operatorname{ad} A)^k}{(k+1)!} H \; ; \; \operatorname{ad} A : H \mapsto AH - HA$$

on peut aussi utiliser le TVI

Prop 36 : $\exp : M_n(K) \to GL_n(K)$ est C^1.

Rq 37 : en particulier $D\exp(0) = Id$.

(GT) **Appli 38** : th de Cartan Von Neumann : Tout sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$. [ADMIS]

2) Systèmes linéaires.

(Gou) **th 39** : le système linéaire $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $A \in M_n(\mathbb{R})$

admet pour solution $y(t) = \exp(tA)y_0$

Ex 40 : dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour solution des fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Def 41 : Soit $(X(t))_t$ une chaîne de Markov à temps continu homogène à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$. $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t)=j \mid X(0)=i)$ (BRE)
Le générateur infinitésimal est, lorsque $t \mapsto P(t) = (P_{ij}(t))_{ij}$ est dérivable, $A = \lim_{h \to 0} \frac{P(h) - P(0)}{h}$.

Rq 42 : Le générateur infinitésimal caractérise alors la dynamique du système.

Ex 43 : Le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov uniforme de matrice de transitions sous jacente K est :

$A = \lambda(K - I)$, avec λ l'intensité de la chaîne.

Rq 44 : les solutions de l'EDO et la fonction $t \mapsto P(t)$ précédente ont des structures de semi-groupes, dans le second cas c'est dû à l'équation de Chapman-Kolmogorov : $P(t+s) = P(t)P(s)$.

3) Stabilités asymptotiques.

PT critiques

Ici, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs C^1 dont 0 est un équilibre.

th 45 : Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est équilibre asymptotiquement stable. (GT)

Ex : Pendule oscillant simple amorti : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x - ky \end{pmatrix}$; $\begin{cases} \ddot{\theta} + \sin\theta + k\dot{\theta} = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$.

0 est un équilibre stable si $k \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

th 46 : Si $Df(0)$ a une valeur propre au moins de partie réelle strictement positive, 0 est un équilibre instable. (GT)

Prop 47 : On peut aussi étudier le cas linéaire plus en détail en dimension 2, $\begin{cases} y' = Ay \\ y_0 = y_0 \end{cases}$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, voir annexe.

III - Topologie matricielle

Les surjectivités

1) Surjectivités

Prop 48 : $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in SO_n(\mathbb{R})\} = A_n(\mathbb{R})$ [FGN]

Prop 49 : $\exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Th 50 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$

Cor 51 : $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ [ZAV].

Cor 52 : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

(CG) Prop 53 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
$\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

Ctre ex 54 : $\exp : (M_n(\mathbb{R})) \to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective

(CG). $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle A, car sinon $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ contiendrait λ et μ tels que $e^\lambda = -1$, $e^\mu = -2$ et contiendrait aussi $\bar\lambda$ et $\bar\mu$. Impossible

3) Groupes matriciels.

Th 55 : Il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(K)$ tel que si G est un sous groupe de $GL_n(K)$, $G \subset V$, alors $G = \{I_n\}$.

Def 56 : $O(p,q)$ désigne le groupe d'isométries de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature (p,q) ; $p,q \neq 0$] DVP

(CG) Th 57 : $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

Cor 58 : $O(p,q)$ admet 4 composantes connexes

4) Groupes à un paramètre

(FGN) Th 59 : Les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ sont les applications $t \mapsto e^{tA}$ avec A quelconque.

Cor 60 : Les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(SL_2(\mathbb{R}), \times)$ sont les applications $t \mapsto e^{tA}$ $A \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(A) = 0$.

Th 61 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, C^1 tel que $\forall t,s$ $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$
Alors il existe $(P, A) \in M_n(\mathbb{R})$, $P^2 = P$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = Pe^{tA}$

Th 62 : Soit $\varphi : (S^1, \times) \to (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme de groupes continu. Alors φ est de la forme : [DVP]

$$e^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{tk_{n-1}} \end{pmatrix} Q$$

avec $R_{tk_i} = \begin{pmatrix} \cos(tk_i) & -\sin(tk_i) \\ \sin(tk_i) & \cos(tk_i) \end{pmatrix}$

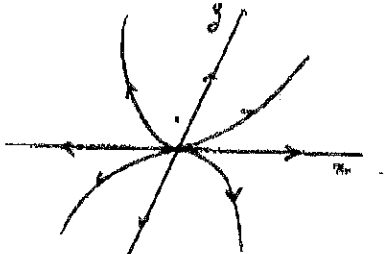
Rq : Ces résultats justifient l'importance de l'exponentielle matricielle dans l'étude des semi-groupes.

Références :

[GOU] : Gourdon
[GT] : Gonnord Tosel 2.
[FGN] : Francinou - Gianella Oraux X-ENS Algèbre 2et3
[CG] : Caldero - Germoni H_2G_2.
[BRE] : Pierre Brémaud Markov Chains, Gibbs Fields Monte Carlo simulation and Queues.

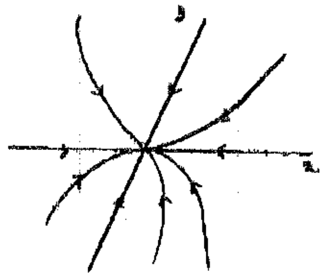
Annexe :

· A a deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2. de $\vec{vp}$ x, y.



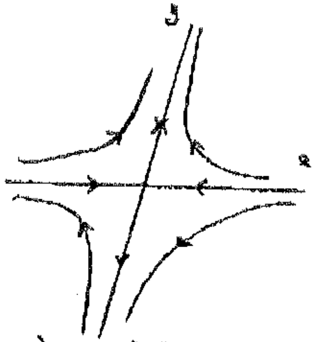
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

noeud impropre instable



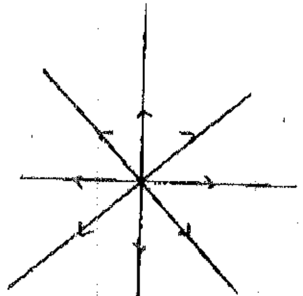
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

noeud impropre stable



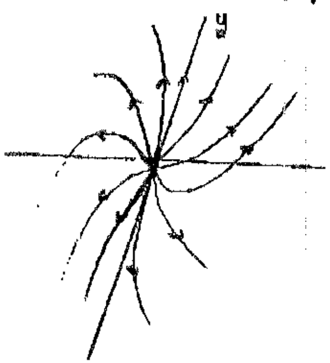
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

col



$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$; A diagonale

noeud propre instable



$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$\lambda > 0$

· A a deux valeurs propres complexes $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$

$\alpha > 0$ $\alpha < 0$ $\alpha = 0$

β intervient sur le rapport d'homothétie

Dessin : Demailly

À rajouter déf° semi-groupes ⚠ attention aux déf°

q° : montrer la décomp polaire

mq $\exists$ V voisin de I_n ds $GL_n(k)$ tq G gr de $GL_n(k)$

. $G \subset V$

q° $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ χ_A = ? calculer exp A.

q°

Image de l'exponentielle

Voir Zavidovique.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

$\triangleright$ – *Étape 1 :* $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ L'inclusion $\subset$ est évidente. Si $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors, M^{-1} comme est un polynôme en M, c'est bien un polynôme en A.

– *Étape 2 :* $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$. En effet, si $M = \exp(N)$ avec $N \in \mathbb{C}[A]$ alors $I_n = \exp(N)\exp(-N) = M\exp(-N)$ donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus, $\mathbb{C}[A]$ est fermé comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $M = \exp(N) \in \mathbb{C}[A]$. Le point précédent permet de conclure.

– *Étape 3 :* $\mathbb{C}[A]^\times$ *est un ouvert connexe de* $\mathbb{C}[A]$. On a $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \overset{-1}{\det}(\mathbb{C}^*)$ donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. Montrons qu'il est connexe par arcs. Pour $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$ on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad M(z) = zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[A].$$

On va donc chercher un chemin de la forme

$$\forall t \in [0,1], \qquad M(z(t)) = z(t)M + (1-z(t))N$$

avec $t \mapsto z(t)$ continue telle que $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$. De plus, l'application $z \mapsto \det(M(z))$ est polynomiale en z donc elle a un nombre fini de zéros. En considérant

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], \qquad z_a(t) = t + iat(1-t),$$

comme $(t,a) \mapsto z_a(t)$ est injective, on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0,1]$, $\det(M(z_a(t))) \neq 0$ et $z_a(0) = z_a(1) = 1$.

– *Étape 4 :* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est ouvert.* On a $\exp(0) = I_n$ et $\mathrm{d}\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et $\mathcal{V}$ de I_n dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ tels que l'exponentielle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V. Alors, pour $B \in \mathbb{C}[A]$, on a

$$\exp(B + \mathcal{U}) = \exp(B)\exp(\mathcal{U}) = \exp(B)V$$

(car B commute avec les éléments de $\mathcal{U}$) donc $\exp(B)V$ est un voisinage ouvert de $\exp(B)$ inclus dans $\exp(\mathbb{C}[A])$.

– *Étape 5 : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans* $\exp(\mathbb{C}[A])$. On a :

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} \underbrace{M \exp(\mathbb{C}[A])}_{\text{ouvert}}.$$

En effet,

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M\{\exp(0)\} \subset \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$$

et si $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ et $N = M \exp(B)$ avec $B \in \mathbb{C}[A]$, alors $N \in \mathbb{C}[A]^\times$ et $M = N \exp(-B) \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

– *Conclusion :* Par connexité de $\mathbb{C}[A]^\times$, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. □

Corollaire 2

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

▷ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a $A \in \mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. □

Corollaire 3

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\exp(M) = \exp(M/2)^2$.

Soit $M = A^2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(P(A)) = A$. Comme A est à coefficients réels, $\exp(\overline{P}(A)) = \exp(\overline{P(A)}) = \overline{A} = A$ donc $\exp((P + \overline{P})(A)) = B \in \exp(\mathbb{R}[A]) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. □

Morphismes de $(\mathcal{S}^1, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$

Voir Oraux X-ENS Algèbre 2

Proposition 1

Pour tout morphisme de groupes continu $\varphi : (\mathcal{S}^1, \times) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$\varphi : e^{it} \longmapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

où, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

▷ Analyse : Soit $\varphi : \mathcal{S}^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu.

– *Étape 1 : Montrons que $\varphi(\mathcal{S}^1) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.* Notons $\psi : \det \circ \varphi$. Comme ψ est continu et $\mathcal{S}^1$ est connexe, $\psi(\mathcal{S}^1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}^*$. Comme $\psi(1) = 1$, on a donc $\psi(\mathcal{S}^1) \subset \mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\mathcal{S}^1$ est compact, $\psi(\mathcal{S}^1)$ est un segment. En particulier, $\psi(\mathcal{S}^1)$ est borné. Comme $\psi(\mathcal{S}^1)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$, on en déduit que $\psi(\mathcal{S}^1) = \{1\}$. Ainsi, $\forall z \in \mathcal{S}^1$, $\varphi(z) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

– *Étape 2 : Montrons que les valeurs propres des images sont de module 1.* Comme $\varphi(\mathcal{S}^1)$ est compact, pour une norme $\|.\|$ quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall z \in \mathcal{S}^1$, $\|\varphi(z)\| \leq M$. On en déduit que

$$\forall z \in \mathcal{S}^1, \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(z)), \qquad |\lambda| \leq M.$$

Soient $z \in \mathcal{S}^1$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(z))$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\lambda^p \in \mathrm{Sp}(\varphi(z)^p) = \mathrm{Sp}(\underbrace{\varphi(z^p)}_{\in \varphi(\mathcal{S}^1)})$ donc $|\lambda^p| \leq M$. Ainsi, la suite $(|\lambda|^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Donc $|\lambda| = 1$.

– *Étape 3 : Relèvement.* Notons $\psi : t \mapsto \varphi(e^{it})$. ψ est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. En fait, ψ est dérivable. En effet, posons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \psi(t)\mathrm{d}t$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, $F'(0) = I_n$. Ainsi, $\dfrac{1}{t}F(t) \xrightarrow[t\to 0]{I} {}_n$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, on en déduit que $\dfrac{1}{t}F(t)$, donc $F(t)$ est inversible pour t petit. Soit donc $a > 0$ tel que $F(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, en intégrant $\psi(x+t) = \psi(x)\psi(t)$, on obtient

$$\int_0^a \psi(x+t)\mathrm{d}t = \psi(x)\int_0^a \psi(t)\mathrm{d}t \qquad ie \qquad \psi(x) = F(a)^{-1}\int_x^{x+a} \psi(t)\mathrm{d}t.$$

Donc ψ est dérivable. Alors, de $\psi(x+t) = \psi(x)\psi(t)$ on déduit $\psi'(x+t) = \psi'(t)\psi(x)$ d'où, pour $t = 0$, $\psi'(x) = \psi'(0)\psi(x)$. En notant $A = \psi'(0)$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \psi(t) = e^{tA}.$$

– *Étape 4 : A est diagonalisable.* Comme ψ est 2π-périodique, $e^{tA} = e^{tA+2\pi A} = e^{tA}e^{2\pi A}$ donc $e^{2\pi A} = I_n$. On a donc $\mathrm{Sp}(e^{2\pi A}) = \{e^{2\pi\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad e^{2\pi\lambda} = 1 \qquad ie\ \lambda \in i\mathbb{Z}.$$

De plus, si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme D et N commutent, on a $I_n = e^{2\pi A} = e^{2\pi D}e^{2\pi N}$. Or D est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres que A, donc $e^{2\pi D}$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\{e^{2\pi\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \{1\}$. Donc $e^{2\pi D} = I_n$. Ainsi, $e^{2\pi N} = I_n$. Si, par l'absurde, $N \neq 0$, on a, pour $X \in \mathrm{Ker}\, N^2 \setminus \mathrm{Ker}\, N (\neq \emptyset)$,

$$e^{2\pi N}X = X + 2\pi NX \neq X$$

ce qui contredit $e^{2\pi N} = I_n$. Ainsi, $N = 0$ et A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Étape 5 : Conclusion. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres non nulles sont conjuguées et dans $i\mathbb{Z}$, donc il existe $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = P\mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_r, -ik_r, 1, \dots, 1)P^{-1}$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{ik_1} & & & & & & & \\ & e^{-ik_1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & e^{ik_r} & & & & \\ & & & & e^{-ik_r} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Or, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1}.$$

Donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$e^{tA} = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Comme les matrices semblables sont réelles, on peut prendre $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

– Synthèse : soit $\varphi : e^{it} \mapsto \psi(t)$ comme ci-dessus. φ est bien défini car R_{tk} ne dépend que de t mod 2π pour $k \in \mathbb{Z}$. C'est un morphisme de groupes car $R_{(t+t')k} = R_{tk}R_{t'k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Il est continu car, pour $k \in \mathbb{Z}$, $|e^{itk} - e^{ikt'}| \leq |k||e^{it} - e^{it'}|$ d'où

$$|\cos(kt) - \cos(kt')| \leq |k||e^{it} - e^{it'}| \qquad |\sin(kt) - \sin(kt')| \leq |k||e^{it} - e^{it'}|.$$

□

Étude de $O(p,q)$

Voir H2G2

Théorème 1

Soient $p, q \neq 0$. On a un homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

$\triangleright$ – *Étape 1 : Application de la décomposition polaire.* Soit $M \in O(p,q)$. Soit $(O,S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ $(n = p+q)$ la décomposition polaire de M. Montrons que $O, S \in O(p,q)$.
Posons $T = {}^tMM = S^2$. Comme $M \in O(p,q)$, on a $MI_{p,q}{}^tM = I_{p,q}$ donc ${}^tM^{-1}I_{p,q}M^{-1} = I_{p,q}$ d'où ${}^tM^{-1} \in O(p,q)$. On en déduit que ${}^tM \in O(p,q)$. Ainsi, $S^2 = T \in O(p,q)$. Comme $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise un homémorphisme, il existe $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp(U)$. Alors,

$$\begin{aligned}
T \in O(p,q) \quad &\Longleftrightarrow \quad TI_{p,q}{}^tT = I_{p,q} \\
&\Longleftrightarrow \quad {}^tT = I_{p,q}^{-1}T^{-1}I_{p,q} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exp\left({}^tU\right) = I_{p,q}^{-1}\exp(-U)I_{p,q} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exp\left({}^tU\right) = \exp\left(-I_{p,q}^{-1}UI_{p,q}\right) \\
&\underset{\exp \text{ bijective}}{\Longleftrightarrow} \quad U = {}^tU = -I_{p,q}^{-1}UI_{p,q} \\
&\Longleftrightarrow \quad UI_{p,q} + I_{p,q}U = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{U}{2}I_{p,q} + I_{p,q}\frac{U}{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{p,q}^{-1}\exp\left(\frac{U}{2}\right)I_{p,q}
\end{aligned}$$

d'où $\exp\left(\dfrac{U}{2}\right) \in O(p,q)$. Or $\exp\left(\dfrac{U}{2}\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\exp\left(\dfrac{U}{2}\right)^2 = T$ donc, par unicité de la racine carrée dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $S = \exp\left(\dfrac{U}{2}\right) \in O(p,q)$. On en déduit que $O \in O(p,q)$.

Ainsi, la décomposition polaire induit l'homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq (O(n) \cap O(p,q)) \times (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p,q)).$$

– *Étape 2 : Étude de $O(n) \cap O(p,q)$.* Soit $O \in O(n) \cap O(p,q)$. Écrivons $O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q,p+q}(\mathbb{R})$. Alors

$$O \in O(n) \cap O(p,q) \iff \left\{ \begin{array}{l} {}^tAA - {}^tBB = I_p \\ {}^tAC - {}^tBD = 0 \\ {}^tCA - {}^tDB = 0 \\ {}^tCC - {}^tDD = -I_q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^tAA + {}^tBB = I_p \\ {}^tAC + {}^tBD = 0 \\ {}^tCA + {}^tDB = 0 \\ {}^tCC + {}^tDD = I_q \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} B = C = 0 \\ A \in O(p) \\ D \in O(q) \end{array} \right.$$

Ainsi, $O(n) \cap O(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in O(p), D \in O(q) \right\} \simeq O(p) \times O(q)$.

– *Étape 3 : Étude de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q)$.* Posons

$$L = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ MI_{p,q} + I_{p,q}M = 0\}.$$

On a vu précédemment que exp réalise un homéomorphisme $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $S \in L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $S = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix}$. Alors

$$SI_{p,q} + I_{p,q}S = 0 \qquad \iff \qquad A = D = 0$$

donc $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

– *Conclusion.* On a montré que

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

□