156 — Exponentielle de matrices. Applications

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-ev de dim n.

I – Exponentielle de matrices

1 – Définition

Déf-Prop 1 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.
On note $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ sa somme, qui est donc continue.

Rq 2 : Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

Prop 3 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$,
$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

Appli 4 : Deux matrices semblables ont des exponentielles semblables

Prop 5 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^t\exp(A) = \exp({}^tA)$.

Appli 6 : L'exponentielle d'une matrice symétrique est symétrique.

Prop 7 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

Cor 8 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$.

Prop 9 : Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA$. Alors
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$$

C-ex 10 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$, $e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$
$e^Ae^B = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \neq e^Be^A = \begin{pmatrix} e^2 & e^3 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$

Prop 11 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$

Cor 12 : $\exp(A)$ commute avec A et donc avec tout polynôme en A.

Ex 13 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = (2e - e^2)I_2 + (e^2 - e)A$.

Cor 14 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $e^{A-A} = e^Ae^{-A} = Id$.
Donc $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

2 – Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Ex 15 : Si A est diagonale : $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Ex 16 : Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, Alors
$e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$ où p est l'indice de nilp. de N.

Ex 17 : $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 18 : Pour $a, b \in \mathbb{K}$, $\exp\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

Th 19 : Décomposition de Dunford $\boxed{\text{DEV 1}}$

Lemme 19.1 : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, on note $P = \alpha \prod_{i=1}^{r} \pi_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en irréductibles.
et $N_i = \ker \pi_i^{\alpha_i}(u)$ $\forall i \in [\![1, r]\!]$
Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et $\forall i \in [\![1, r]\!]$, la projection sur N_i $//^t$ à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Th 19.2 : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, tq χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)$ tel que
- d diagonalisable
- n nilpotent
- d et $n \in \mathbb{K}[u]$
- $u = d + n$

Appli 20 : Soit $u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tel que χ_u scindé. On note P_i les projecteurs sur N_i $//^t$ à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$, $(\lambda_i)_{i \in [\![1, r]\!]} = Sp(u)$
Alors $\exp(u) = \exp(d)\exp(n) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(u - \lambda_i id)^k}{k!} \right) \times P_i$

Ex 21 : cf Annexe 1

Déf 22 : (Bloc de Jordan)
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on note $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$
avec $m \in [\![0, n]\!]$

Th 23 : Décomposition de Jordan.
soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice u est de la forme diagonale par blocs
$$\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1), -, J_{r_1}(\lambda_1), ---, \underbrace{J_1(\lambda_n), --, J_{r_n}(\lambda_n)})$$
où $r_i = \dim E_{\lambda_i}$ et $d_i = \dim C_{\lambda_i}$: $\dim \alpha_n$

Appli 24 : Calcul de l'exponentielle par blocs.

Appli 20 bis : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si e^A diagonalisable sur $\mathbb{K}$

II – Propriétés de la fonction exponentielle

1 – Régularité

Prop 25 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^\infty$

Prop 26 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est différentiable en 0 et $d(\exp)(0) = Id$.

Cor 27 : la fonction exponentielle est un $\mathcal{C}^1$-difféo au voisinage de 0.

Appli 28 : Les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ arbitrairement petits sont triviaux $(= \{I_n\})$.

Def 29 : Si $A \in B_{\|\cdot\|}(I_n, 1) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\|.\|$ une norme matricielle, on pose $\log(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(A-I_n)^k}{k}$

Prop 30 : $\log : B_{\|.\|}(I_n, 1) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue et $\forall A \in B_{\|.\|}(I_n, 1)$, $\exp(\ln(A)) = A$

/!\ → **Ex 31** : $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\|A\|_\infty = 1/2 < 1$, $\log(A) = \begin{pmatrix} -\ln 2 & 1 \\ 0 & -\ln 2 \end{pmatrix}$

Prop 32 : On note $\mathcal{N}$ les endomorphismes nilpotents
$\mathcal{U}$ ——— unipotents.
Alors $\exp : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{U}$ est un homéomorphisme d'inverse le logarithme.

Ex 33 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ $\log(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 – Injectivité et surjectivité

Rq 34 : l'exponentielle n'est pas injective :
. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour $n \geq 1$. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$

Ex 35 : $\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

Prop 36 : $\exp : \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est injective.

Th 37 : Pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$
où $\mathbb{C}[A]$: inversibles de l'anneau $\mathbb{C}[A]$

Cor 38 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

Coro 39 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ **DEV 2**

C-ex 40 : exp non surjective dans $GL_n(\mathbb{R})$: $-I_n$ n'est pas une exponentielle de matrice.

Prop 41 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective

Th 42 :
l'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. **DEV 3**

Cor 43 : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Rq 44 : on a les mêmes résultats sur $\mathbb{C}$:
$\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéo
$GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

Appli 45 : on note pour $p,q \in \mathbb{N}$,

$O(p,q) = \{M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tM I_{p,q} M = I_{p,q}\}$

Alors $O(p,q) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$

Coro 46 : $O(p,q)$ est compact ssi $p=0$ ou $q=0$.

III - Application aux équations différentielles

1. Equations linéaires

Th 47 : Soit (E) : $Y' = AY + B(t)$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants
Avec $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$
Alors (E) a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$.

Cor 46 : La solution au problème de Cauchy

$(C) : \begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = V_0 \end{cases}$ est $Y(t) = e^{(t-t_0)A} V_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

. avec second membre : $(C') \begin{cases} Y' = AY + B(t) \\ Y(t_0) = V_0 \end{cases}$

est $Y(t) = e^{(t-t_0)A} V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\,du$

Ex 47 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

Def 48 : on considère le système différentiel autonome
$y' = f(y)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

- $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est un équilibre si $f(y_0) = 0$
- un équilibre y_0 est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si y est la solution du problème $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases}$ avec $|y_1 - y_0| \leq \delta$, Alors $\forall t \geq t_0$, $|y(t) - y_0| \leq \varepsilon$.
- un équilibre y_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et que $\exists \delta_1 > 0$ tq si $|y_1 - y_0| \leq \delta_1$, alors $y(t) \xrightarrow[t\infty]{} y_0$.

Ex 49 : cf Annexe 2

Th 50 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 0 est un équilibre de $y' = Ay$

- stable ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$, $\begin{cases} Re(\lambda) < 0 \\ \text{ou } Re(\lambda) = 0 \text{ et } \dim E_\lambda = \dim C_\lambda \end{cases}$
- asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$.

Ex 51 Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 0 n'est pas stable

si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 0 est asymptotiquement stable

Th 52 (Liapunov) : Soit $y' = f(y)$ un système différentiel
Avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $f(0) = 0$.
Alors 0 est un équilibre asymptotiquement stable si $Df(0)$ a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Ex 53 : Pendule avec frottement : $y'' + ky' + c\sin y = 0$ avec $c > 0$, $k > 0$. 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

Annexe 1 : Décomposition de Dunford et Exponentielle

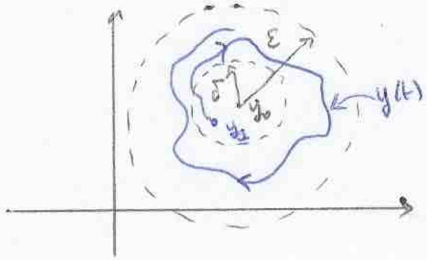
$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \frac{-e^2+9e^4}{2} & \frac{e^2-e^4}{2} & e^2-4e^4 \\ \frac{-e^2-5e^4}{2} & \frac{e^2+e^4}{2} & e^2+2e^4 \\ \frac{-e^2+7e^4}{2} & \frac{e^2-e^4}{2} & e^2-3e^4 \end{pmatrix}$$

Annexe 2 :

Equilibre stable :



Equilibre asymptotiquement stable