Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n un entier supérieur à 1.

I- Définition et premiers calculs

1) La fonction exponentielle

Déf-Prop 1: $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La série $\sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\exp M$ sa somme.

Prop 2: La fonction exponentielle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 3: 1) $\exp(0) = I_n$

2) $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

3) Si N est nilpotente d'indice i, alors $\exp N = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{N^k}{k!}$

4) $\exp\left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp A & 0 \\ \hline 0 & \exp B \end{array}\right)$

5) $t \in \mathbb{R}$;
$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

6) Si T est triangulaire supérieure de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; alors $\exp T$ est triangulaire supérieure de diagonale $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$

Coro 4: 1) L'exponentielle n'est pas injective (sauf si $n=1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

2) $\det \exp M = e^{\mathrm{Tr}\, M}$

3) $\mathrm{Sp}(\exp M) = \{e^{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}\, M\}$

Prop 5: $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

1) $\exp(PMP^{-1}) = P(\exp M)P^{-1}$

2) $\exp(M^*) = \exp(M)^*$

Ex 6: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}$

Coro 7: M diagonalisable $\Rightarrow$ $\exp M$ diagonalisable

Prop 8: Si $[A,B] = 0$ (ie $AB = BA$), alors :
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

C-ex 9: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exp(A)\exp(B) \neq \exp(B)\exp(A)$

Coro 10: L'exponentielle est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$.
De plus, $\exp(M)^{-1} = \exp(-M)$.

II- Exponentielle et décomposition de Dunford

1) Décomposition additive, décomposition multiplicative

Déf 11: Une décomposition de Dunford additive (D.A.) de M, (resp. multiplicative (D.M.)) est une décomposition de la forme suivante :

(D.A.) $M = D+N$ où $\begin{cases} D \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente} \\ [D,N] = 0 \end{cases}$

(D.M.) $M = DU$ où $\begin{cases} D \text{ diagonalisable, } U \text{ unipotente} \\ [D,U] = 0 \end{cases}$

Thm 12 : Si Π_M est scindé sur $\mathbb{K}$, alors M admet une unique décomposition de Dunford additive. De plus, D et N sont dans $\mathbb{K}[M]$

Lemme 13 : $\exp(M) \in \mathbb{K}[M]$

Prop 14 : Si Π_M est scindé sur $\mathbb{K}$; $M = D+N$, alors on a :

1) $\exp(M) = \exp(D)\exp(N)$ ((DM) de $\exp M$)
2) $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)(\exp N - I_n)$ ((DA) de $\exp M$)

App 15 : M diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow$ $\exp M$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

App 16 :
L'équation $\exp M = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a pour solutions les matrices diagonalisables de spectre inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Application au calcul de l'exponentielle :

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut calculer $\exp M$ à partir d'une réduite de Jordan de M en remarquant :

$$\exp(J_\lambda^n) = \begin{pmatrix} e^\lambda & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

2) Image de l'exponentielle

Prop 17 : $\exp : \mathrm{Nilp} \to \mathrm{Unip}$ est un homéomorphisme, de réciproque $U \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(U-I)^{k+1}$

Coro 18 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

App 19 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{$carrés de $GL_n(\mathbb{R})\}$

App 20 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

App 21 : Existence de racine p-ième dans $GL_n(\mathbb{C})$

III - Exponentielle et groupe linéaire

1) Décomposition polaire

Rappel 22 : (Décomposition polaire)
$GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
De même, $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Thm 23 :
L'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De même ; $\exp : H_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_n^{++}(\mathbb{C})$.] DEV 1

Coro 24 : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$
$GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

2) Sous-groupes du groupe linéaire

Prop 25 : L'application exp est $\mathcal{C}^\infty$, et sa différentielle en 0 vaut I_n.

Coro 26 : L'exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $M_n(K)$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(K)$.

App 27 : $GL_n(K)$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Prop 28 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(K)$ un morphisme de groupes continu. Il existe alors un unique $A \in M_n(K)$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \exp(tA)$

Ex 29 : $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ associé à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

DÉV 2

Lemme 30 : $X, Y \in M_n(K)$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n = \exp(X+Y)$$

Thm 31 : Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Remarque 32 : L'espace tangent en I_n à un tel sous-groupe G est :
$$T_{I_n}G = \{X \in M_n(K), \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$$

Ex 33 : 1) $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2-1 et $T_{I_n}SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{Tr} M = 0\}$

2) $O_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

On a : $T_{I_n}O_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})$

IV- Systèmes différentiels linéaires

Prop 34 : $t \mapsto \exp(tM)$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto M\exp(tM)$

Thm 35 : $M \in M_n(K)$. $Y_0 \in K^n$

L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = MY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est $Y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to K^n \\ t \mapsto \exp(tM)Y_0 \end{array}$

Ex 36 : Le système $\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+y \end{cases}$ avec donnée initiale $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ a pour solution : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \\ y(t) = \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) \end{cases}$

Prop 37 : $M \in M_n(\mathbb{C})$.

Les solutions de $Y' = MY$ sont asymptotiquement stables si et seulement si les valeurs propres de M ont toutes partie réelle strictement négative.