157

128

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général, E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie

I. Endomorphismes trigonalisables

1) Définitions et caractérisations

[TAU] p.197

def: • $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe $\mathcal{B}$ une base de E tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure

• $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure

Rq: une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

def: • on note χ_u le polynôme caractéristique de u:
$$\chi_u = \det(u - X\mathrm{id})$$

• on note m_u le polynôme minimal de u ; m_u est le polynôme unitaire qui engendre l'idéal annulateur de u

[TAU] p.197

prop: $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre:

(i) u est trigonalisable

(ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$

(iii) m_u est scindé sur $\mathbb{K}$

(iv) $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé tq. $P(u)=0$

cor: $\mathbb{K}$ algébriquement clos $\Rightarrow$ tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable

en particulier, pour $\mathbb{K}$ quelconque, tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable dans un sur-corps de $\mathbb{K}$.

contre-ex: • $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2$, A trigonalisable sur $\mathbb{R}$ non diagonalisable sur $\mathbb{C}$

• $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_B = X^2+1$, B non trigonalisable sur $\mathbb{R}$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$

• $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_C = (X^2+1)^2$, C non trigonalisable sur $\mathbb{R}$ non diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Rq: si A est semblable à T triangulaire, les valeurs propres de A sont les éléments de la diagonale de T

App: si u est trigonalisable avec $\mathrm{Sp}\, u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $\mathrm{Sp}\, P(u) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\}$ et $\mathrm{Sp}\, \exp(u) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$ [TAU] p.198

def-prop: si $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, les $E_i := \mathrm{Ker}\,(u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$ sont appelés sous-espaces caractéristiques, ils sont stables par u et $\dim E_i = \alpha_i$

prop: si u est trigonalisable et si F est un sev stable par u, alors $u_{|F}$ est trigonalisable

App: Théorème de Cayley-Hamilton : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u)=0$ [GR] p.29

2) Trigonalisation simultanée

def: si $X \subseteq \mathcal{L}(E)$, X est cotrigonalisable s'il existe une base dans laquelle tout $u \in X$ est triangulaire

prop: si tout élément de X est trigonalisable et si les éléments commutent deux à deux, alors X est cotrigonalisable. [TAU] p.198

contre-ex: • $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ trigonalisables (et semblables), non cotrigonalisables

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cotrigonalisables et ne commutant pas.

prop: si u, v sont cotrigonalisables, $u+v$ et uv sont trigonalisables

contre-ex: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ni la somme ni le produit sont trigonalisables

[...] ...V.1

Thm (Lie-Kolchin) : tout sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable

3) Propriétés topologiques

soit $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{K})$

...-A] p.178 **prop** : l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est dense dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$

prop : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$

II. Endomorphismes nilpotents

...A] p.168 **déf** : $\mathcal{N} := \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, \exists\, k \geq 0 \text{ tq. } u^k = 0\}$ ensemble des endomorphismes nilpotents. Le plus petit entier p tq. $u^p = 0$ est appelé l'indice de nilpotence de u

Ex : · si $u \in \mathcal{N}$, $v \mapsto u \circ v$ est nilpotent

· $\mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $P \mapsto P'$ est nilpotent

prop : si $\dim E < \infty$, $u \in \mathcal{N} \iff \forall x \in E, \exists\, k \geq 0$ tq. $u^k(x) = 0$

contre-ex : $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ non nilpotent et si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P^{(\deg P + 1)} = 0$

...A] p.170 **prop** : $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre :

(i) $u \in \mathcal{N}$

(ii) $\chi_u = (-1)^n X^n$

(iii) $m_u = X^k$ pour un certain k

(iv) u est trigonalisable et $Sp\, u = \{0\}$

Rq : en particulier, u nilpotent $\Rightarrow$ u trigonalisable

contre-ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Sp_{\mathbb{R}} A = \{0\}$ mais A non nilpotente

prop : $A \in \mathcal{N} \iff \exists\, (A_p)_{p \in \mathbb{N}}$, A_p semblable à A tq. $A_p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ [X-ENS 2] p.149

lemme : si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle,

$u \in \mathcal{N} \iff \forall\, k \in \mathbb{N}, \ tr(u^k) = 0$

contre-ex : si $car(\mathbb{K}) = p$, $tr(I_p^k) = 0$

Thm (Burnside) : soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, alors : G est fini $\iff$ G est d'exposant fini [X-ENS 2] p.?? DEV.2

Structure de $\mathcal{N}$

$\mathcal{N}$ non stable par addition et par multiplication :

$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non nilpotentes

prop : · $vect\, \mathcal{N} = \operatorname{Ker} tr$ [O-A] p.169

· $\mathcal{N}$ est un cône (i.e. $N \in \mathcal{N} \Rightarrow \lambda N \in \mathcal{N}$) d'intérieur vide

III. Application à la réduction

lemme des noyaux : $u \in \mathcal{L}(E)$, $P = P_1 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$, les P_i étant premiers 2 à 2. On note $N_i = \operatorname{Ker} P_i(u)$, alors : [GOU] p.173-192

$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i$

de plus, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Ex : · si $m_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$, $E = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)$

u est diagonalisable

· si $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $E = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$

u est trigonalisable

[...AU]p.171 · si F est un sev stable par u et si $P(u_{|F})=0$, alors :

$$F=\bigoplus_{i=1}^{k}\left(F\cap \operatorname{Ker} P_i(u)\right)$$

[GOU]p.193 **Thm** (décomposition de Dunford) : soit $u\in\mathcal{L}(E)$ trigonalisable alors il existe un unique couple $(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ tq :

- d est diagonalisable, n est nilpotent
- $u=d+n$ et d et n commutent

de plus, d et n sont des polynômes en u.

App :
- calcul de A^n, $\exp tA$
- [ENS2] 113 surjectivité de $\exp : M_n(\mathbb{C})\to GL_n(\mathbb{C})$
- A diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp A$ diagonalisable

[GOU]p.193 **Rq** : on peut calculer d et n par les projecteurs sur $\operatorname{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$

def : un bloc de Jordan de taille k est une matrice de $M_k(\mathbb{K})$ de la forme :

$$J_{\lambda,k}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$$

[O-A]p.172-201 **Thm** (réduction de Jordan pour les nilpotents) : soit $u\in\mathcal{N}$, alors il existe $n_1\geq\cdots\geq n_p$ des entiers et $\mathcal{B}$ une base de E tq :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}J_{0,n_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{0,n_p}\end{pmatrix}$$

cette forme est unique.

Rq : si on note $\nu_j(u)$ le nombre de blocs de Jordan de taille j, on a $\nu_j(u)=2\dim\operatorname{Ker}u^{j}-\dim\operatorname{Ker}u^{j-1}-\dim\operatorname{Ker}u^{j+1}$ [O-A]p.173

Thm (réduction de Jordan – cas général) : soit $u\in\mathcal{L}(E)$ trigonalisable, alors il existe $\mathcal{B}$ une base de E tq : [GOU]p.19 [O-A]p.30

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}J_{\lambda_1,k_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_p,k_p}\end{pmatrix}$$

les λ_i étant les valeurs propres de u non nécessairement distinctes.

cette forme est unique à permutation des blocs près.

Applications
- on peut décrire les classes de similitudes
- la relation de similitude ne dépend pas du corps choisi, le polynôme minimal non plus
- M est semblable à ${}^tM$ [GOU]p.20
- si Y est solution de $Y'=AY$, $Y(t)$ est bornée pour $t\geq 0$ ssi $\forall\lambda\in\operatorname{Sp}A$, $\operatorname{Re}\lambda<0$ ou $\operatorname{Re}\lambda=0$ et les blocs de Jordan associés à λ sont triviaux
- si $X=\{A\in M_n(\mathbb{F}_q)\,/\,A$ est nilpotente d'ordre $n\}$,

card $X=\prod_{i=0}^{n-2}(q^n-q^i)$ (regarder l'orbite par action de conjugaison de $J_{0,n}$)

Développements :

- Théorème de Lie Kolchin
- Théorème de Burnside

Autres développements possibles (liste non exhaustive) :

- décomposition de Dunford
- méthode effective pour la décomposition de Dunford (voir texte de Daniel Ferrand)
- surjectivité de l'exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ (sans doute trop court)

Références :

[TAU] : Algèbre, P. Tauvel

[O-A] : Objectif Agrégation, V. Beck, J. Malick, G. Peyré

[GOU] : Algèbre, X. Gourdon

[X-ENS2] : Oraux X-ENS, Algèbre 2, S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas

[GRI] : Algèbre linéaire, J. Grifone

[C-L] : Algèbre corporelle, A. Chambert-Loir