157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Cadre : k corps, E k-ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A \in M_n(k)$

I. Généralités

[GOU] 161 **Déf** : $\lambda \in k$ valeur propre de u si $\exists x \in E \,/\, u(x) = \lambda x$
x est un vecteur propre de u
et $E_\lambda = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$ l'espace propre de u associé à λ

[GOU] 162 **Déf** : $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$ le polynôme caractéristique de A
$\chi_u(X) = \chi_{Mat_{\mathcal{B}}(u)}(X)$ indépendant de la base $\mathcal{B}$

Rq : $\chi_A = \chi_{{}^tA}$ et $\chi_A(X) = (-1)^n (X^n - \alpha_1 X^{n-1} + \alpha_2 X^{n-2} \dots + (-1)^n \alpha_n)$ où $\begin{cases} \alpha_1 = tr(A) \\ \alpha_n = \det(A) \end{cases}$

[TAU] 168 **Déf** : $\pi_u \in k[X]$ unitaire tq $(\pi_u) = \{P \in k[X] / P(u) = 0\}$
polynôme minimal de u

Rq : $u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ isomorphisme donc $\pi_A = \pi_u$ où u tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = A$

[GOU] 162 et 176 **Prop** : · [λ valeur propre de u] $\Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$
· F ss-ev strict de E stable par u, alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ et $\begin{cases} \chi_{u_{|F}} \mid \chi_u \\ \pi_{u_{|F}} \mid \pi_u \end{cases}$

[GOU] 176 **Th** : (Cayley-Hamilton) $\chi_u(u) = 0$

Rq : $\pi_u \mid \chi_u$ et $d°\pi_u \leq n$

[GOU] 175 **Lemme** : (des noyaux) $P = P_1 \dots P_s \in k[X]$, P_i premiers 2 à 2
$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

Rq : Il sera donc intéressant de décomposer π_u ou $\chi_u = P_1 \dots P_s$ pour avoir $E = \bigoplus \operatorname{Ker} P_i(u)$

II. Endomorphismes trigonalisables

1) Définition et caractérisations

[TAU] 197 **Déf** : · u trigonalisable si $\exists \mathcal{B}$ base de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire
· A " si elle est semblable à une matrice triangulaire

Rq : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_1)$ alors si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ triangulaire inférieure, $Mat_{\mathcal{B}'}(u)$ triangulaire supérieure

Th : (caractérisations) LASSE : i) u trigonalisable
ii) χ_u scindé sur k
iii) π_u scindé sur k

Cor : Si k est algébriquement clos, tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable [TAU] 197

Contre-ex : · $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = \pi_A = X^2$ trigo sur $\mathbb{R}$, pas diago sur $\mathbb{C}$
· $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = \pi_A = X^2 + 1$ pas trigo sur $\mathbb{R}$, diago sur $\mathbb{C}$
· $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_A = \pi_A = (X^2+1)^2$ pas trigo sur $\mathbb{R}$ et pas diago sur $\mathbb{C}$

Rq : Si A trigonalisable, $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $Sp(A) = \{\lambda_i, i \in [\![1,n]\!]\}$

App : u trigonalisable, $Sp(u) = \{\lambda_i\}$, $P \in k[X]$
Alors $Sp(P(u)) = \{P(\lambda_i)\}$ et $Sp(\exp(u)) = \{e^{\lambda_i}\}$ [TAU] 198

2) Trigonalisation simultanée

Prop : u trigonalisable et F ss-ev stable par u, alors $u_{|F}$ trigonalisable [GOU] 165

Prop : $(u_i)_{i \in I} \subset \mathcal{L}(E)$ tq u_i trigonalisables et commutent 2 à 2
Alors les u_i sont cotrigonalisables (ie $\exists$ base commune de trigo) [GOU] 171

Contre-ex : · $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cotrigonalisables mais pas commutantes
· $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ semblables mais pas cotrigonalisables

Rq : Si u et v cotrigonalisables, alors $u+v$ et uv trigonalisables

Contre-ex : · $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A+B$ pas trigonalisable.
· $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pas trigonalisable

[C-L] 93 Application : (Th de Lie-Kolchin) Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.

3·) Propriétés topologiques

$k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{T}_n(k)$ l'ensemble des matrices trigonalisables

[O-A] 179-180 Prop : $\{M\in M_n(k)$ diagonalisable à valeurs propres distinctes$\}$ est dense dans $\mathcal{T}_n(k)$

Prop : $\mathcal{T}_n(k)$ est un fermé de $M_n(k)$

II. Endomorphismes nilpotents

1·) Définition et caractérisations

[O-A] 168 Déf : $\mathcal{N}=\{u\in\mathcal{L}(E)\,/\,\exists p\in\mathbb{N},\ u^p=0\}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de $\mathcal{L}(E)$.

$R=\min\{n\in\mathbb{N}\,/\,u^n=0\}$ l'indice de nilpotence de u

Ex : · A nilpotente, alors $M\mapsto AM$ est nilpotent

· $\varphi : P\mapsto P'$ et $\psi : P\to P(X+1)-P(X)$ sont nilpotents dans $k_n[X]$ mais pas dans $k[X]$ bien que $\forall P\in k[X],\ \varphi^{d^\circ P+1}=\psi^{d^\circ P+1}=0$

[O-A] 170 Th : (caractérisations) LASSE : i) u nilpotente

ii) $\chi_u=(-1)^nX^n$

iii) $\exists p\leq n\,/\,\pi_u=X^p$ $(p=R)$

iv) u trigonalisable et $Sp(u)=\{0\}$

Rq : En particulier, u nilpotente $\Rightarrow$ u trigonalisable

Contre-ex : · I_n trigonalisable mais pas nilpotente

· $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, $Sp_{\mathbb{R}}(A)=\{0\}$ mais A pas nilpotente

Prop : · si $car(k)=0$, u nilpotente $\Leftrightarrow\forall\lambda\in k\setminus\{0\},\ u\sim\lambda u$ $\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N},\ tr(u^i)=0$ [O-A] 171 et 200

· si $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, N nilpotente $\Leftrightarrow\exists(A_p)_{p\in\mathbb{N}}\in M_n(k)^{\mathbb{N}}$ tq $\forall p,\ A_p\sim N$ et $A_p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$ [Gou] 189

Contre-ex : Si $car(k)=p$, $tr(I_p^i)=0,\ \forall i$

Application : (Th de Burnside) [DVPT 1] [X-ENS] 185

Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini

2·) Structure de $\mathcal{N}$

Rq : $\mathcal{N}$ est un cône : $\forall u\in\mathcal{N},\ \forall\lambda\in k,\ \lambda u\in\mathcal{N}$

En dimension 2, $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{N}\Leftrightarrow\begin{cases}\det M=0\\ \mathrm{tr}\,M=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a^2-bc=0\\ d=a\end{cases}$ (sic)

[O-A] 168-169 Prop : u nilpotent et $v\,/\,u\circ v=v\circ u$, alors :

· $u\circ v=v\circ u$ est nilpotent

· si de plus v nilpotent, $u+v$ nilpotent

Rq : $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel (ni un groupe)

par ex : $\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\notin\mathcal{N}$

Prop : $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})=\mathrm{Ker}(tr)$

3·) Unipotence

[O-A] 174 Déf : $\mathcal{U}=id+\mathcal{N}$, l'ensemble des éléments unipotents de $\mathcal{L}(E)$

Prop : $u\in\mathcal{U}\Leftrightarrow\chi_u=(1-X)^n\Leftrightarrow u$ trigonalisable et $Sp(u)=\{1\}$

Prop : $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\exp:\mathcal{N}\to\mathcal{U}$ réalise un homéomorphisme

Rq : $k=\mathbb{F}_q$ et $n\leq q$, $\exp:\mathcal{N}\to\mathcal{U}$ est bien définie (car pour $i\in[\![1,q-1]\!]$, $\frac{1}{i!}$ a un sens dans $\mathbb{F}_q$) et réalise encore une bijection

[Zav] Application : · $\exp(M_n(\mathbb{C}))=GL_n(\mathbb{C})$

· $\exp(M_n(\mathbb{R}))=\{A^2\,/\,A\in GL_n(\mathbb{R})\}$

IV Application à la réduction

1·) Noyaux itérés et sous-espaces caractéristiques

[Gou] 191-193

Prop: $\exists ! R \in \mathbb{N} \,/\, \{0\} = \mathrm{Ker}(u^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(u) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Ker}(u^R) = \mathrm{Ker}(u^{R+1}) = \dots$

R est appelé l'indice de u et il vérifie de plus :

- $E = \mathrm{Im}(u^0) \supsetneq \mathrm{Im}(u) \supsetneq \dots \supsetneq \mathrm{Im}(u^R) = \mathrm{Im}(u^{R+1}) = \dots$
- $E = \mathrm{Ker}(u^R) \oplus \mathrm{Im}(u^R)$ avec $\begin{cases} u_{|\mathrm{Ker}(u^R)} \text{ nilpotente} \\ u_{|\mathrm{Im}(u^R)} \text{ inversible} \end{cases}$

Rq: Si u nilpotente, R est l'indice de nilpotence de u et $E = \mathrm{Ker}(u^R)$

Déf: u trigonalisable, $\chi_u = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_s)^{\alpha_s}$

$\forall i$, $N_i = \mathrm{Ker}(u-\lambda_i id)^{\alpha_i}$ sous-espace caractéristique de u associé à λ_i

Prop:
- $\forall i$, N_i est stable par u et $\dim N_i = \alpha_i$
- $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$
- $\exists B \,/\, \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\lambda_1 \ \ *}}^{\alpha_1} & \overbrace{\hphantom{\lambda_s \ \ *}}^{\alpha_s} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda_s & * \\ 0 & \lambda_s \end{matrix} \end{pmatrix}} \end{array}$

Th: u trigonalisable, alors :
- $\pi_u = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{R_i}$, $R_i \leq \alpha_i$
- R_i indice de $u - \lambda_i id$

Application: Calcul de π_u

2·) Décomposition de Dunford

[Gou] 195

Th: u trigonalisable, $\exists ! (d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq : [DVPT 2]
- d diagonalisable et n nilpotente
- $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en u

Contre-ex: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable [O-A] 164

Application: Calcul de l'exponentielle de u [Gou] 196

3·) Réduction des nilpotents

Rq: Pour $\lambda_i \in Sp(u)$, N_i stable par u et $(u-\lambda_i id)_{|N_i}$ nilpotente

Pour étudier u trigonalisable, il suffit de savoir réduire les nilpotents.

a) Tableaux de Young : (cf. Annexe 1)

[MM] 112-113

Déf: Tableau de Young associé à $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_R > 0$: tableau à R colonnes, dont la $i^{ème}$ colonne comporte n_i cases

Rq: Le conjugué d'un tableau de Young est encore un tableau de Young

Application: $u \in \mathcal{N}$, $d_i = \dim(\mathrm{Ker}(u^i))$, $n_i = d_i - d_{i-1}$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_R > 0$

Rq: R = indice de nilpotence de u = nb de colonnes de $TY(u)$.

Prop: Si $u, v \in \mathcal{N}$, $u \sim v \iff TY(u) = TY(v)$

b) Décomposition de Jordan pour les nilpotents

(cf. Annexe 2)

Déf: bloc de Jordan : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Lemme: LASSE : [GRi] 194-195
- i) $R = n$ ie $\chi_u = (-1)^n X^n$ et $\pi_u = X^n$
- ii) $\exists x \,/\, (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ base de E (ie u cyclique)
- iii) $\exists B \,/\, \mathrm{Mat}_B(u) = J$.

Th: $u \in \mathcal{N}$, $\exists B \,/\, \mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{Diag}(J_1, \dots, J_{n_1}) = \tilde{J}$ [GRi] 193

où $J_i \in \mathcal{M}_{p_i}(k)$ et $\max\{p_i\} \leq R$

Rq: Le nombre de blocs de taille i dans réduite de Jordan de u est $n_{i-1} - n_i = 2d_i - d_{i+1} - d_{i-1}$ = nb de colonnes à i lignes ds $TY^*(u)$ [MM] 112

4·) Décomposition de Jordan généralisée

Th: u trigonalisable, $\chi_u = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_s)^{\alpha_s}$ [GRi] 193

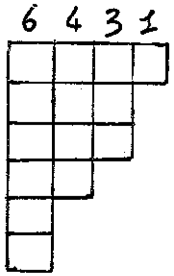
$\exists B \,/\, \mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{Diag}(\tilde{J}_1(\lambda_1), \dots, \tilde{J}_s(\lambda_s))$

où $\tilde{J}_i(\lambda_i) = \lambda_i I_{\alpha_i} + \tilde{J}_i$ et $\tilde{J}_i$ réduite de Jordan du nilpotent $(u-\lambda_i id)_{|N_i}$

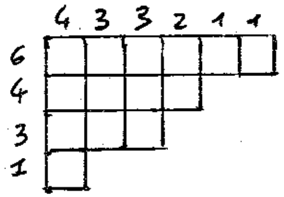
Annexe 1 :

$(n_k)_k \quad 6 \geq 4 \geq 3 \geq 1$.

$TY(n_k)$:



$TY(n_k)^*$:



Annexe 2 : Matrice de Jordan réduite associée au Tableau ci dessus.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{smallmatrix} & & & & & 0 \\ & \begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix} & & & & \\ & & \begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix} & & & \\ & & & \begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix} & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

4 3 3 2 1 1

[GOU] : Xavier GOURDON - Algèbre.
[O-A] : V. BECK, J. MALICK, G. PEYRÉ - Objectif Agrégation
[GRI] : Joseph GRIFONE - Algèbre linéaire
[MM] : R. MANSUY, R. MNEIMNÉ - Algèbre linéaire
[TAU] : Patrice TAUVEL - Algèbre.
[X-ENS] : Oraux X-ENS, Algèbre 2.
[C-L] : CHAMBERT-LOIR, Algèbre Corporelle
[Zav] : M. ZAVIDOVIQUE, Un max de Math.

Développements :

- Thme de Burnside [X-ENS] p. 185
- Décomposition de Dunford [GOU] p. 195.

Autre Dev possibles :

- Thme de Lie-Kolchin [C-L] p. 93
- Surjectivité de l'exponentielle [Zav] p. 48

Encore plus de choses sur les Tableaux d'Young :

- Rached Mneimné, Réduction des endomorphismes

Histoires hédonistes de groupes et de géométries

Caldero, Germoni