24.09.14 [Ref] Mneimné - Testard
Mneimné : Réduction des endomorphismes

LEÇON 157 : ENDOMORPHISMES TRIGONALISABLES, ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Soit K, un corps [commutatif]. On se place dans E, un K espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I Définitions et notations

← ne peut pas faire l'objet d'une partie

- On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On dit que deux matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ sont semblables si elles représentent le même endomorphismes dans 2 bases différentes.
- On défini χ_u, le polynôme caractéristique de u : $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda Id)$.
- Le polynôme caractéristiques est un invariant de similitude. On peut donc le définir sur les matrices.
- Les racines de χ_u sont les valeurs propres de u. On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.
- On appelle Π_u l'unique générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u, c'est le polynôme minimal de u. (Cet idéal est non ~~vide~~ trivial car $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie n^2).

II Endomorphismes trigonalisables

Definition II.1 (*Endomorphismes trigonalisables*)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que u est trigonalisable si il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire superieure.
On dit que A est trigonalisables si elle est semblable à une matrice triangulaire superieure.

Example : Toute matrice triangulaire inferieure est trigonalisable

On conjugue par $\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition II.1 (***Caractérisation de la trigonalisabilité***)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ☞ u *est trigonalisable.*
- ☞ u *annule un polynôme scindé.*
- ☞ χ_u *est scindé.*
- ☞ Π_u *est scindé.*

Remarque : La caractérisation est identique sur les matrices.

Remarque : Sur un corps algébriquement clos (par exemple $\mathbb{C}$), tout endomorphisme est trigonalisable.

Application : Résolution des equations différentielles : $X' = AX$ par trigonalisation sur $\mathbb{C}$.

Corollaire II.1.1 (***Trace et déterminant***)

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ *est trigonalisable, alors :*

- $Tr(u)$ *est la somme des valeurs propres.*
- $\det(u)$ *est le produit des valeurs propres.*
- *Les valeurs propres de* u^p *sont les* λ^p *ou* λ *est valeur propre de* u. *Les multiplicités sont les mêmes.*

Lemme II.1

Tout endomorphisme (resp. matrice) trigonalisable possède une valeur propre.

Lemme II.2

Soient f *et* g, *deux endomorphismes qui commutent.*
Si f *et* g *sont trigonalisables, alors ils ont un vecteur propre communs.*

Théorème II.1 (***Trigonalisation simultanée***)

Soient $(f_i)_{i\in I}$, *une famille d'endomorphismes de* E *qui commutent.*
Les f_i *sont trigonalisables dans une même base et* $\sum_{j\in J\subset I} f_j$ *est trigonalisable.*

III Endomorphismes nilpotents

1 Définition et première propriétés

Definition III.1 (***Endomorphismes nilpotents, indice de nilpotence***)

On pose $\mathscr{N} = \left\{u \in \mathscr{L}(E), \exists k \in \mathbb{N}^*, u^k = 0\right\}$.
Les endomorphismes de $\mathscr{N}$ *sont appellés* endomorphismes nilpotents.
Soit $u \in \mathscr{N}$. *On appelle* indice de nilpotence *de* u *le plus petit entier* $k \in \mathbb{N}^*$ *vérifiant* $u^k = 0$.
Ces deux notions sont définies de manière analogue sur les matrices.

Exemples :

☞ La dérivation dans $K_n[x]$ est nilpotente.

☞ Si A est nilpotente, $\begin{array}{rccc} m_d : & \mathscr{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(K) \\ & M & \longmapsto & AM \end{array}$ est nilpotent.

Proposition III.1 (***Une première caractérisation***)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
u est nilpotent si et seulement si $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p(x) = 0$.

Remarque : C'est faux en dimension infinie.
contre-exemple : La dérivation dans $K[X]$.

Definition III.2 (***Bloc de Jordan***)

On appelle bloc de Jordan de taille p la matrice $J_p \in \mathscr{M}_p(K)$ définie par : $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : Un bloc de Jordan de taille p est nilpotent d'indice p.

Proposition III.2 (***Structure de l'ensemble des nilpotent***)

$\mathscr{N}$ est un cône mais pas un espace vectoriel.

Proposition III.3 (***Somme et composée de nilpotents***)

Soient u et v, deux endomorphismes nilpotents qui commutent.
$u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotent.

Proposition III.4 (***Endomorphisme induit et espaces caractéristiques***)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $\lambda \in Sp(u)$ et soit F_λ le sous-espace caractéristique associé à λ. L'endomorphisme $\tilde{u}_{F_\lambda} - \lambda Id$ est nilpotent.

Remarque : $\tilde{u}_{F_\lambda}$ désigne l'endomorphisme induit par u sur F_λ.

Théorème III.1 (***Nilpotent et unipotent***)

L'exponentielle est un homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents.

2 Noyaux itérés et réduction

Proposition III.5 (***Noyaux itérés***)

Soit $u \in \mathscr{N}$ et soit k l'indice de nilpotence de u.
$\{0\} = \ker(f^0) \subsetneq \ker(f^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(f^k) = E$.

Corollaire III.5.1 (***Indice de nilpotence***)

L'indice de nilpotence p d'un endomorphisme nilpotent vérifie : $p \leqslant n$.

Corollaire III.5.2 (***Trigonalisation des nilpotents***)

Soit u, un endomorphisme nilpotent.
Soit $\mathscr{B}$, une base adaptée à l'inclusion stricte $\{0\} = \ker(f^0) \subsetneq \ker(f^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(f^k) = E$.
La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est triangulaire superrieure stricte. Réciproquement, toute matrice triangulaire superrieure stricte est nilpotente.

Proposition III.6 (***Caractérisation***)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ☞ u *est nilpotent.*
- ☞ $\Pi_u = X^p$
- ☞ $\chi_u = (-1)^n X^n$

DVP1

Proposition III.7 (***Une caractérisation de la nilpotence***)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
$u \in \mathscr{N} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, Tr\left(u^k\right) = 0$

Application III.7.1 (***Théorème de Burnside***)

Tout sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini.

Proposition III.8 (***Base réduite***)

Soit u, un endomorphisme nilpotent d'indice p.
Soit $x \in E \setminus \ker\left(u^{p-1}\right)$.
La famille $\mathscr{B} = \left(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre et stable par u.
De plus la matrice de l'emdomorphisme induit par u sur $vect(\mathscr{B})$ est J_p.

3 La Décomposition de Jordan

DVP2

Théorème III.2 (***Décomposition de Jordan***)

Soit $u \in \mathscr{N}$.
Il existe une base dans laquelle la matrice de u est formée de blocs diagonaux de Jordan. Ceux-ci sont uniques à l'ordre des blocs près.

IV La décomposition de Dunford

Théorème IV.1 (***Théorème de décomposition des noyaux***)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit $(P_1, \cdots, P_r) \in (\mathbb{K}[X])^r$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Si les P_i sont 2 à 2 premiers entre eux, alors :

$$\ker\left(\left(\prod_{i=1}^{r} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(P_i(u)\right).$$

DVP3

Théorème IV.2 (***Decomposition de Dunford***)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Si u est trigonalisable, alors,

$$\exists!\,(d,n) \in (\mathscr{L}(E))^2 \text{ vérifiant : } \begin{cases} u = d + n \\ d \text{ est diagonalisable} \\ n \text{ est nipotent} \\ d \circ n = n \circ d \end{cases}.$$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Remarque :
On définit une décomposition de Dunford multiplicative $u = d \circ v$ avec v unipotent et d diagonalisable. L'exponentielle envoit Dunford additive sur Dunford multiplicative.

Application IV.2.1 (***Exponentielle et puissance sur*** $\mathbb{C}$)

L'exponentielle de matrice défini une surjection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *dans* $GL_n(\mathbb{C})$.
Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ *et soit* $A \in GL_n(\mathbb{C}), \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), A = B^p$

LE THÉORÈME DE BURNSIDE

Dans ce chapitre, $n \in \mathbb{N}^*$ et E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1 ***(Nilpotence et trace)***

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
u est nilpotent $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, Tr\left(u^k\right) = 0$

Démonstration :

$\Rightarrow$

u est nilpotent donc trigonalisable avec 0 comme unique valeur propre.

Ainsi, il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire superrieure avec des élements diagonaux nuls. Il en est donc de même pour toutes ses itérées et donc, par définition de la Trace, $\forall k \in \mathbb{N}^*, Tr\left(u^k\right) = 0$.

$\Leftarrow$

Soit u, un endomorphisme vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^*, Tr\left(u^k\right) = 0$.

Soient, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, les valeurs propres complexes non nulles de u, 2 à 2 distinctes et soient $\alpha_1, \cdots \alpha_r$, leurs multiplicités.

Par hypothèses, $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^k = 0$.

Si 0 n'est pas la seule valeur propre, ce système est un système de vandermonde non nul et inversible. Ainsi, les α_i sont tous nul et donc 0 est la seule valeur propre (ce qui est exclu).

Ainsi, u est nilpotent. ■

Théorème 1 ***(Théorème de Burnside)***

Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini.

Démonstration :

Soit G, un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $(M_1, \cdots, M_p) \in G^p$, une base de F :=vect(G).

On pose $\begin{array}{llll} f: & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ & A & \longmapsto & (Tr(AM_i))_{i \in [\![1,p]\!]} \end{array}$.

Montrons que f est injective et d'image finie.

<u>Injectivité de f</u>

Soit $(A, B) \in G^2$ vérifiant $f(A) = f(B)$. Montrons que $A = B$.

Montrer que $A = B$ revient à montrer que $D := AB^{-1} - I_n$ est nulle.

Nous allons montrer que D est nilpotente et diagonalisable.

☞ Montrons que D est nilpotente.

Pour démontrer ce résultat, utilisons la proposition 1.

Par linéarité de la trace et par $f(A) = f(B)$, $\forall M \in$vect(G), $Tr(AM) = Tr(BM)$.

Cette égalitée est en particulier vraie $\forall M \in G$.

G est un groupe, donc, $AB^{-1} \in G$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^{\star}, Tr\left(\left(AB^{-1}\right)^{k}\right) = Tr\left(AB^{-1}\left(AB^{-1}\right)^{k-1}\right) = Tr\left(BB^{-1}\left(AB^{-1}\right)^{k-1}\right) = Tr\left(\left(AB^{-1}\right)^{k-1}\right)$.

Ainsi, par une récurrence immédiate, il vient, $\forall k \in \mathbb{N}, Tr\left(\left(AB^{-1}\right)^{k}\right) = Tr\left(\left(AB^{-1}\right)^{0}\right) = Tr(I_n) = n$.

Mais, AB^{-1} et I_n commutent, et donc, $D^k = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j (-1)^j \left(AB^{-1}\right)^{k-j}$ et donc, par linéarité de la trace,

$Tr\left(D^k\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j (-1)^j\, Tr\left(\left(AB^{-1}\right)^{k-j}\right) = n \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_k^j (-1)^j = 0.$

Ainsi, d'après le lemme, D est nilpotente.

☞ Montrons que D est diagonalisable.

G est d'exposant fini. Notons le N.

Ainsi, par définition, $\forall M \in G$, $M^N - In = 0$.

M annule donc un polynôme scindé simple et est donc diagonalisable.

Ainsi, tout les éléments de G sont diagonalisables.

Mais alors, $AB^{-1} \in G$ est diagonalisable, et donc, D est diagonalisable comme polynôme en AB^{-1}.

Ainsi, f est injective.

<u>f est d'image finie</u>

D'après ce qui précède, les valeurs propres des éléments de G sont des racines N--ièmes de l'unité.

Ainsi, $Tr(G)$ est fini et donc comme l'image de f est incluse dans $Tr(G)$, il vient le résultat. ■

CHAPITRE 2

LA DÉCOMPOSITION DE DUNFORD-JORDAN

Dans ce chapitre, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 2 (*La décomposition de Dunford-Jordan*)

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimention n et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le polynôme minimal de u, μ_u, est scindé si et seulement si :

$$\exists!\,(d,n) \in (\mathscr{L}(E))^2 \text{ vérifiant : } \begin{cases} u = d + n \\ d \text{ est diagonalisable} \\ n \text{ est nipotent} \\ d \circ n = n \circ d \end{cases}.$$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Démonstration :

Démonstration de l'existence

Par hypothèse, le polynôme minimal de u, est scindé sur $\mathbb{K}$.

On peut donc écrire $\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont 2 à 2 distincts et les α_i sont des entiers superrieurs à 1.

On pose, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $F_i = \ker((u - \lambda_i Id)^{\alpha_i})$. et par appliquation du **théorème de décomposition des noyaux**, il vient : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

On peut donc définir un endomorphisme par ses restrictions aux F_i.

On défini d, l'endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, la restriction de d à F_i vaut $\lambda_i Id_{F_i}$.

L'endomorphisme d est diagonalisable car diagonal sur chaque F_i. Il est ainsi diagonalisable sur E.

Soit $n = u - d$.

Montrons que n et d commutent et que n est nilpotent.

Les F_i sont stables par u et d. Ils sont donc également stables par n.

Ainsi, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme induit par d sur F_i étant une homothétie, il commute avec l'endomorphisme induit par n sur F_i.

Ainsi, n et d commutent.

De plus, sur chaque espace caractéristique de u, F_i, $0 = (u - \lambda_i Id)^{\alpha_i} = n^{\alpha_i}$.

Ainsi les endomorphismes induits par n sur les F_i sont nilpotents et donc, n est nilpotent.

Le couple (d, n) convient donc.

Montrons que u et n sont des polynomes en u. On note $\forall i \in [\![1,r]\!]$, π_i, la projection sur F_i paralèllement à la somme des autres espaces caractéristiques.
Cette projection est un polynome en u [cf. démonstration du théorème de décompositin des noyaux]. Ainsi, comme $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i$, d est un polynôme en u et par suite, u aussi.

unicité
Soit (d', n'), une autre décomposition répondant au problème.
In vient alors $d + n = u = d' + n'$, ainsi, $d - d' = n - n'$. Mais alors, d' commute avec d' et n', donc avec u, donc avec tout polynome en u, donc avec d et d'.
Ainsi, d et d' commutent et sont tout deux diagonalisables.
Ils sont donc diagonalisable dans une même base et donc, $d - d'$ est diagonalisable.
De mêmen n et n' commutent et donc, n et n' étant nilpotents, $n - n'$ est nilpotent.
Ainsi, $n - n' = d - d'$ est un endomorphisme nilpotent et diagonalisable, donc l'endomorphisme nul et donc, $d' = d$ et $n' = n$, d'où le résultat cherché. ■

Une autre méthode consiste à travailler à l'aide d'une adaptation de la méthode de Newton. La démonstration proposée est à la fois élémentaire et effective.

Théorème 3 (***La décomposition de Dunford-Jordan***)

Soit K, un corps parfait et soit A, une $K-$Algèbre de dimention finie, n. et soit $x \in A$.

$$\exists! \, (d,n) \in A^2 \text{ vérifiant : } \begin{cases} x = d + n \\ d \text{ est à polynôme minimal séparable} \\ n \text{ est nipotent} \\ dn = nd \end{cases}.$$

De plus, d et n sont des polynômes en x.

Démonstration :

Existence de d et n
Montrons l'existence de d et n dans la sous algèbre de A engendrée par x, $B := K[x] \simeq K[X] / (\mu_x)$.

On décompose μ_x en produit de facteurs irréductibles : $\mu_x = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$, avec $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\alpha_i \geqslant 1$.

Soient $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ et $Q = P^{\alpha}$, où $\alpha = \max_{i \in [\![1,r]\!]} \alpha_i$.

Notre objectif est de construire d comme racine de la méthode de Newton appliquée à P. C'est-à-dire, de définir une suite $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{P}{P'}(x_n) \end{cases}$.

Montrons que cette suite est bien définie :

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \exists y_n \in B, P(x_n) = P(x)^{2^n} y_n. \\ P'(x_n) - P'(x) \text{ est nilpotent.} \\ x_n \text{ est bien défini.} \end{cases}$

n=0

☞ $y_0 = 1$ convient.

☞ $P'(x_0) - P'(x) = 0$ est nilpotent.

☞ Il s'agit de montrer que $P'(x)$ est inversible.

Comme $P' = \sum_{i=1}^{r} P_i' \prod_{j \neq i} P_j$, aucun P_i ne divise P' et donc $PGCD(P', \mu_x) = 1$.

Ainsi P' est inversible dans $K[X]/(\mu_x)$ et donc, $P'(x)$ est inversible.

Hérédité :

☞ Par application d'un développement de Taylor,
$\exists Q \in K[X,Y], P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X,Y)$.

Mais, $P(x_{n+1}) = P(x_n + y)$ avec $y = -\frac{P}{P'}(x_n)$.

Ainsi, $P(x_{n+1}) = P(x_n) + yP'(x_n) + y^2Q(x_n, y) = P(x_n)^2 \tilde{Q}(x_n, y)$, où $\tilde{Q} = \frac{Q}{(P'(x_n))^2}$.

Ainsi, en posant $y_{n+1} = y_n^2 \tilde{Q}(x_n, y)$, il vient le résultat.

☞ Comme P' est un polynôme, $P'(x_{n+1}) - P'(x) \in (x_{n+1} - x)B$.

De plus, par définition de la suite (x_n), $(x_{n+1} - x)B \subset \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)B \subset \sum_{i=0}^{n} P(x_i)B$.

Mais par hypothèse de récurrence, ces éléments sont nilpotents et commutent (B est commutative).

Il vient alors $P'(x_n) - P'(x)$ est nilpotent.

☞ D'après le point précédent, $P'(x_{n+1})$ est somme d'un élément inversible et d'un élément nilpotent. Il est donc inversible.

La suite (x_n) est donc bien définie.

De plus, comme $\exists N \in \mathbb{N}, P(x)^N = 0$, la suite est stationnaire.

Soit d sa limite.

Par construction, d vérifie $P(d) = 0$ et donc, d est séparable.

Posons $n = x - d$.

Par définition de d, $\exists N \in \mathbb{N}, n = \sum_{i=0}^{N} x_i - x_{i+1} \in P(x)B$, et donc comme $P(x)$ est nilpotent, n est nilpotent.

Unicité

Soit(d', n'), une autre décomposition de x.

Comme, $d' + n' = x$, d' et n' commutant avec d' et n' commute avec x, donc avec tout polynôme en x, donc avec d et n construits précédemment.

Ainsi, $\epsilon = d - d' = n - n'$ est nilpotent.

De plus, $P(s') = P(s + \epsilon) = P(s) + \epsilon P'(s) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ et donc, $\epsilon \in (\epsilon^2)$, puis récursivement, $\forall n \geqslant 1$, $\epsilon \in (\epsilon^n)$ et donc, $\epsilon = 0$.

d et n sont des polynômes en u

On applique le théorème pour la $K-$Algèbre A. Soit (d, n), la décomposition.

On l'applique également pour la $K-$Algèbre $K[x]$. Soit (d', n'), la décomposition.

Il vient alors, $d + n = x = d' + n'$, et donc, par unicité de la décomposition, il vient, $d = d'$ et $n = n'$ et donc, d et n sont des polyômes en x. ∎