157 – Endomorphismes trigonalisables, Endomorphismes nilpotents

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps. E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. $u \in End(E)$. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. $A = Mat_{\mathcal{B}}\, u$.

I – Résultats préliminaires

Définition 1 : $E_\lambda = Ker(u - \lambda id_E)$ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
$\chi_u(X) = det(A - XI_n)$ où $A = Mat_{\mathcal{B}}\, u$, est le polynôme caractéristique de u.

Π_u le polynôme minimal de u est le polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u.

Théorème 1 : (Cayley-Hamilton) $\chi_u(u) = 0$

Théorème 2 : (Lemme des noyaux). Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Si $P = P_1 \dots P_s$ où les P_i sont premiers 2 à 2,
Alors $Ker\, P(u) = \bigoplus_{i=1}^{s} Ker\, P_i(u)$

Proposition 1 : Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $u_{|F} \in End(F)$ et $\Pi_{u_{|F}} \mid \Pi_u$, $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$

II – Endomorphismes trigonalisables

1) Définition et caractérisations

Définition 2 : u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}\, u$ soit triangulaire.
i.e. A est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 3 : Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u est trigonalisable (ii) χ_u scindé sur $\mathbb{K}$
(iii) Π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 1 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme est trigonalisable.

Contre-exemple 1 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Application 1 : $\det e^A = e^{tr A}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) Trigonalisation simultanée :

Proposition 2 : Si u est trigonalisable et F est un sev stable par u, alors $u_{|F}$ est trigonalisable.

Théorème 4 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux.
Alors il existe une base commune de trigonalisation.

Contre-exemple 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables mais pas cotrigonalisables.

3) Propriétés topologiques $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note

$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables.
$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables.
$\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ ——— à valeurs propres distinctes.

On a : $\mathcal{E}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 3: Dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\begin{cases} \overline{\mathcal{C}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ \mathring{\mathcal{D}}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{C}_n(\mathbb{K}) \end{cases}$

Proposition 4: $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III - Endomorphismes nilpotents

1) Définitions et caractérisations

Définition 3: On dit que u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.
$r = \min\{p \in \mathbb{N} : u^p = 0\}$ est l'indice de nilpotence.
On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

Exemple 3: • Si A est nilpotent, alors $M \mapsto AM$ est nilpotent
•• $P \mapsto P'$ est nilpotent dans $E = \mathbb{K}_n[X]$

Théorème 5: les conditions suivantes sont équivalentes
(i) u est nilpotent
(ii) $\chi_u(X) = (-1)^n X^n$
(iii) $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_u(X) = X^r$
(iv) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.

Contre-exemple 4: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente mais $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$.

Proposition 5: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
$\forall k \in \mathbb{N},\ tr(u^k) = 0 \iff \chi_u(X) = (-1)^n X^n$

Contre-exemple 5: Si $car(\mathbb{K}) = p$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $tr(Id^k) = 0$ mais Id n'est pas nilpotente.

Application 2: Théorème de Burnside $\boxed{DVT1}$
Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini.

2) Structure de $\mathcal{N}$:

$\mathcal{N}$ n'est pas stable par l'addition.
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas nilpotent.

Proposition 6: $\mathcal{N}$ est un cône (i.e. $\mathcal{N}$ est stable par multiplication par un scalaire)

Remarque 1: Soit $u, v \in \mathcal{N}$.
Si u et v commutent, alors $u+v \in \mathcal{N}$

Exemple 6: $n=2$.
$\chi_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det M$. $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
M nilpotent $\iff tr(M) = \det(M) = 0$
$\iff M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a^2 + bc = 0$

Proposition 7:
$Vect(\mathcal{N}) = Ker(tr)$

IV- Application à la réduction

1) Réduction selon les sous-espaces caractéristiques

Théorème 6 : On suppose que $\chi_u(X)$ est scindé : $\chi_u(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E où $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ avec $\mathcal{B}_i$ une base de $N_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i, telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_1 \end{bmatrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{bmatrix} \lambda_p & (*) \\ (0) & \lambda_p \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

et $\begin{bmatrix} \lambda_i & (*) \\ (0) & \lambda_i \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{|N_{\lambda_i}})$

Application 3 : calcul de la puissance d'une matrice. Si A est trigonalisable, $A \sim \begin{bmatrix} M_1 & (0) \\ (0) & M_p \end{bmatrix}$ donc $A^k \sim \begin{bmatrix} M_1^k & (0) \\ (0) & M_p^k \end{bmatrix}$ où $M_i = (\lambda_i \mathrm{Id} + J)$ et J nilpotente. Avec la formule du binôme, on calcule facilement M_i^k. (car $\lambda \mathrm{Id}$ et J commutent)

2) Décomposition de Dunford :

Théorème 7 : On suppose que χ_u est scindé. Alors u se décompose de manière unique sous la forme $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent, n et d commutent.

De plus, n et d sont des polynômes en u.

Application 4 : Calcul de l'exponentielle

Contre exemple 7 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (qui est déjà en elle même une décomposition de Dunford).

3) Réduction de Jordan :

Théorème 8 (admis) : On suppose que χ_u est scindé et $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{bmatrix} A_1 & (0) \\ (0) & A_p \end{bmatrix} \text{ où } A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \nu_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \nu_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$

et $\forall i,j \quad \nu_{i,j} \in \{0,1\}$.

Références :

[OA] = "Objectif agrégation", Beck, Malick, Peyré

[Go] = Gourdon, "Algèbre"

[Gr] = Grifone "Algèbre linéaire"