157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

On se place dans un K-ev E de dimension finie n.

Rappel 0 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique et on note χ_u le polynôme $\chi_u(X) = \det(X id - u)$.

- Les éléments $\lambda \in K$ tq $\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$ sont les valeurs propres de u, elles correspondent aux racines de χ_u.
- On appelle vecteurs propres les $x \in E \setminus \{0\}$ associés à une valeur propre λ, tels que $u(x) = \lambda x$.
- On note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda id - u)^{m_\lambda}$ où m_λ est l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_u. C'est le sous espace caractéristique lié à λ.

I - Endomorphismes trigonalisables / cotrigonalisables

① Trigonalisation

Déf 1 : $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable si $\exists B$ base de E, $\mathrm{Mat}_B(u)$ est triangulaire

Déf 1' : $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire

Ex 2 : Les transvections et les dilatations sont trigonalisables

Th 3 : $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable sur $K \Leftrightarrow \chi_u$ est scindé dans $K \Leftrightarrow \Pi_u$ est scindé dans K.

Ex 3' : $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\exists n \in \mathbb{N}$, $u^n = 0$, u est trigonalisable.

Cor 4 : K algébriquement clos $\Rightarrow \forall u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable

Cor 5 : Si u est trigonalisable et F sev de E stable par u.
Alors $u_{|F}$ et $u_{|E/F}$ sont trigonalisables.

Ex 6 :
- $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$ si $n \geq 3$. $\chi_{P_\sigma} = X^n - 1 \Rightarrow P_\sigma$ tz ssi $\mu_n \subset K$.
(Sur $\mathbb{F}_p$, si $n = p$, cette matrice est tz mais pas dg).
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. $\chi = X^2 + 1$.

Appli 7 :
- $u \in \mathcal{L}(E)$. $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in Sp_{\bar{K}}(u)} \lambda$. $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp_{\bar{K}}(u)} \lambda$
- $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$
- $\mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(A)^p\ [p]$
- $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$

(*) Prop 1'' : u est trigonalisable $\Leftrightarrow \forall B$ base de E, $\mathrm{Mat}_B(u)$ est trigonalisable

Th 8 : Lemme des noyaux.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $n > 0$. Si $P_1, \dots, P_n \in K[X]$ premiers entre eux 2 à 2, alors : $\mathrm{Ker}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(f)\right] = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_i(f))$
De plus, la projection de la somme directe sur $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Ker}(P_j(f))$ est la restriction d'un polynôme en f.

Cor 9 : $\dim E_\lambda = m_\lambda$

② Topologie ; $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}_n(K)$, $T_n(K)$ l'ensemble des matrices diagonalisables, trigonalisables

Prop 10 : $\overline{\mathcal{D}_n(K)} = T_n(K)$

Cor 11 : $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Prop 12 : $T_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

③ Cotrigonalisation

Déf 13 : $(u_i)_{i \in I}$ famille de $\mathcal{L}(E)$ est cotrigonalisable ssi $\exists B$ base de E tq $\forall i$, $\mathrm{Mat}_B(u_i)$ est triangulaire.

Prop 14 : $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent $\Rightarrow v$ stabilise $\mathrm{Im}\, P(u)$, $\mathrm{Ker}\, P(u)$ $\forall P \in K[X]$

Th 15 : Toute famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent est cotrigonalisable. De plus, toute composition ou combinaison linéaire d'éléments de la famille est trigonalisable

Appli 16 : Si $f_1, \dots, f_n$ tq $\begin{cases} f_i = 0 & \forall i \\ f_i \text{ commutent} \end{cases}$ alors $f_1 \circ \dots \circ f_n = 0$

Appli 17 : Théorème de Lie-Kolchin. [DVT 1]
Soit G un sous groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est conjugué à un sous groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures. En d'autres termes, G est cotrigonalisable

Ex 18 : Deux exemples de tels sous groupes :
- {matrices triangulaires supérieures sans 0 sur la diagonale}
- { ___ avec des 1 ___ }

*** Rem 15.1 :** C'est une condition suffisante mais pas nécessaire.

Ex 15.2 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne commutent pas mais sont cotrigonalisables

C-Ex 15.3 : $\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ ne sont pas trigonalisables.

(P) Noyaux itérés.

II - Endomorphismes nilpotents, unipotents

① Définitions, premières propriétés.

Déf 19: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N},\ u^n = 0$

On appelle indice de nilpotence le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tq $u^n = 0$

Ex 20: $u \in \mathcal{L}(E)$, $(u - \lambda id)_{|E_\lambda}$ est nilpotent.

Prop 21: Si u nilpotent, tel que $u^k(x) = 0$ et $u^{k-1}(x) \neq 0$ pour un $x \in E$, alors $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ est libre.

Cor 22: L'indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

Cor 23: Si k indice de nilpotence, $\exists x \in E$ tq $\{u^i(x)\}_{i \in [\![0;k-1]\!]}$ est libre

Cor 24: u nilpotent $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists k_x \in \mathbb{N}, u^{k_x}(x) = 0$

Rem 25: Le corollaire est faux en dimension infinie

C-Ex 26: $K[X] \to K[X]$, $P \mapsto P'$ non nilpotent.

Ex 27: • $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, $N^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$ (k). N nilpotente.

• $K_n[X] \to K_n[X]$, $P \mapsto P'$ nilpotent d'indice $n+1$

• Si u nilpotent, $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $f \mapsto u \circ f$ est nilpotent (de même indice)

Prop 28: u nilpotent $\Leftrightarrow \chi_u = X^n \Leftrightarrow \pi_u = X^k$, k indice de nilpotence
$\Leftrightarrow u$ trigonalisable et $sp(u) = \{0\}$.

C-Ex 29: $Sp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \{0\}$ mais non nilpotente.

Cor 30: u nilpotente $\Leftrightarrow$ Dans une base $\mathcal{B}$, $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire stricte

Prop 31: Les nilpotents forment un cône, car l'ensemble des nilpotents est stable par la multiplication par un scalaire.

Prop 32: La somme de deux nilpotents d'indices k' et k'' qui commutent est nilpotente, et son indice $k \leq k' + k'' - 1$

Rem 33: L'ensemble des nilpotents n'est pas un sev, ni un groupe.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotent.

Prop 34: N nilpotente $\Rightarrow Tr(N^p) = 0 \quad \forall p > 0$

Réciproque vraie en caractéristique 0 (et $p \in [\![1;n]\!]$ suffit)

C-Ex 35: En caractéristique $p = n$, $Tr(Id^k) = n = p = 0 \quad \forall k$

Prop 36: $\mathcal{N}$ l'ensemble des nilpotents. Alors $Vect(\mathcal{N}) = Ker(Tr)$

Th 37: Burnside [OVT 2] + Prop 34

G sg de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est fini $\Leftrightarrow G$ est d'exposant fini.

Rappel 38: G est d'exposant fini si $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall g \in G, g^k = e$

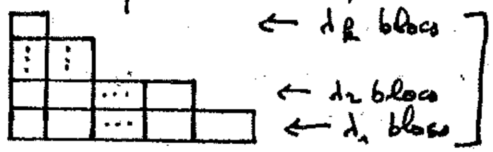
② Noyaux itérés et décomposition de Jordan : cas nilpotent

Déf/Prop 39: u nilpotent. On pose $K_i = Ker\, u^i$, $k_i = \dim K_i$.

On a $0 \leq k_{i+1} - k_i \leq k_i - k_{i-1}$. En particulier, la suite K_i est strictement croissante puis stationnaire, à E.

Déf/Prop 40: $\lambda_i = k_{i+1} - k_i$ est une partition de n, ie $n = \sum \lambda_i$, $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$

À une partition de n, on associe le tableau de Young:



λ_i blocs sur la ligne i, en partant du bas.

Déf 41: Soit λ partition de n. On appelle λ^* la partition duale lue sur les colonnes du tableau associé au tableau symétrique $|_{y=x}$

Th 42: Soit λ partition associée à u nilpotent

$\exists \mathcal{B}$ base de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = J_{\lambda^*} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1^*} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_k^*} \end{pmatrix}$

où $J_{\lambda_i^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{\lambda_i^*} \Big\} \lambda_i^*$: décomposition de Jordan

Dans cette décomposition, il y a $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ blocs de taille i.

Cor 43: La forme de Jordan est un invariant total pour les matrices nilpotentes pour la similitude.

Prop 44: A nilpotente $\Leftrightarrow 0$ est dans l'adhérence de la classe de similitude de A.
($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

③ Dénombrement

Prop 45: Il y a $q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{F}_q)$

Prop 46: Il y a $p(n)$ orbites de similitude nilpotentes, où $p(n)$ est le nombre de partitions de n.

4) Unipotence

Def 47: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit unipotent si $u - id$ est nilpotent.

Rem 48: u unipotent $\iff$ u est trigonalisable et toutes ses valeurs propres sont égales à 1
$\iff \chi_u = (X-1)^n$

Ex 49: $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un groupe d'unipotents et c'est un p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F})$.

Prop 50: exp est un homéomorphisme des nilpotents sur les unipotents et $n \mapsto id + n$ aussi.

III - Réduction

1) Réduction de Jordan

Th 51: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u scindé. $\exists \mathcal{B}$ base de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs du type :

$$J_p(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{\updownarrow\, \ell} \quad \text{où } \lambda \in Sp(u).$$

La taille des blocs associés à $\lambda \in Sp(A)$ est donnée en étudiant le nilpotent $(u - \lambda id)_{|E_\lambda}$.

Ex 52: Forme de Jordan de : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rem 53: Il y a un algorithme explicite pour calculer la réduction de Jordan.

Appli 54: $X' = AX$. Quitte à conjuguer, on a $A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$

$\to$ Cas $A = J_n(\lambda)$.

Solution : $X = e^{tA} X_0 = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} X_0$

2) Décomposition de Jordan - Dunford

Prop 56: Si $d = n$ où $d, n \in \mathcal{L}(E)$, d diagonalisable, n nilpotent alors $d = n = 0$.

Th 57: 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé, $\exists! (d, n)$, d diagonalisable, n nilpotent, d et n commutent, tq $u = d + n$.

d et n sont des polynômes en u.

2) Si K est parfait et $u \in \mathcal{L}(E)$, tq χ_u sans facteur carré. Alors $\exists! (s, n)$, s semi-simple, n nilpotent, $sn = ns$ tq $u = s + n$

Appli 58: Calcul de $\exp(u)$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et χ_u scindé

Rem 59: La méthode de Newton donne une démonstration de ce théorème, qui permet de connaître un algorithme de calcul pour d / s.

Ex 60: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diagonalisable}} + 0$. ⚠ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas

Cor 61: Si $u \in GL(E)$, χ_u scindé, $\exists! (d, t)$ $\begin{vmatrix} d \text{ diagonalisable} \\ t \text{ unipotent} \end{vmatrix}$, $dt = td$, $u = dt$

Appli 62: 1) Image de l'exponentielle :

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})^2$

2) Surjectivité de la puissance p : $GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$, $A \longmapsto A^p$

3) $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u scindé dans K. Alors : $\exp u$ diagonalisable $\iff$ u diagonalisable

On peut rajouter une application de la réduction de Jordan :
Stabilité de 0 pour l'EDO $X' = AX$ selon $Re(\lambda)$, $\lambda \in Sp(A)$ et
défectivité ou non des vp.
Mais nous n'avons pas trouvé de référence.

Autres dvpmt :

* décomposition de Dunford.
* exponentielle (surjectivité)
* u diago <u>ssi</u> exp u diago.

<u>Références :</u>

I - 1) [Mansuy] (ou [Gourdon] ou [Obj. Agrégation] ou [Tauvel])
  2) Topologie : [Caldero - Germoni] p 121
  [Obj. Agrégation] p 178-179.
  3) Cotz [Tauvel p 158] [Gourdon p 170] [Mansuy p 103]

II - 1) [Tauvel] [Obj. Agrégation]
  2) [Caldero - Germoni] tome I. ⟷ <u>Tableaux d'Young</u>
  3) [C - G] tome II
  4) [Obj. Agrégation]
  Ex 49 : [Perrin]

III - 1) [Gourdon]
  2) [Tauvel]
  Th 57 : 2) [Obj. Agreg] p 160 version $\mathbb{R}$
  Appli 62 : 3) [Obj. Agreg] p 215
  2) [Gourdon]

THÉORÈME DE LIE-KOLCHIN

Le groupe T des matrices triangulaires supérieures inversibles à coefficients complexes est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui a le bon goût d'être résoluble (pour une preuve, voir la référence citée plus bas). L'objectif est de montrer une réciproque partielle à ce résultat :

Théorème (Lie, Kolchin). *Soit G un sous-groupe* connexe *résoluble de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. *Alors G est conjugué à un sous-groupe de T. En d'autres termes, G est cotrigonalisable.*

Avant d'attaquer la preuve, on rappelle les faits suivants :

Rappels. *Soit G un groupe. On note $DG := < g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}, g_1, g_2 \in G >$ le groupe dérivé, engendré par les commutateurs. On dit qu'un groupe est résoluble s'il admet une suite décroissante de sous-groupes $(G_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que $G_0 = G$, $G_n = \{1\}$, G_{i+1} est distingué dans G_i et G_i/G_{i+1} est abélien pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On a alors :*

(1) G est résoluble si et seulement si $D^nG = \{1\}$ pour un entier n
(2) Si G est résoluble et $\phi\colon G \to H$ est un morphisme, alors $\phi(G)$ est résoluble
(3) D^iG est caractéristique, donc distingué dans G pour tout $i \geq 1$.

On aura aussi besoin d'un lemme :

Lemme. *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ *connexe. Alors DG est connexe.*

Preuve. Soit G un tel sous-groupe et S l'ensemble de ses commutateurs. On a une application continue

$$\left\{\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & S \\ s,t & \mapsto & sts^{-1}t^{-1}\end{array}\right.$$

donc S est connexe. Considérons S_m l'ensemble des produits de m éléments de S. L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} S^m & \longrightarrow & S_m \\ s_1,\dots,s_m & \mapsto & s_1\cdots s_m\end{array}\right.$$

est continue donc puisque S^m est connexe, S_m est connexe. On conclut en remarquant que $1 \in S_m$ pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et $DG = \{1\} \bigcup \cup_m S_m$. $\square$

Démonstration du théorème. Si G est abélien, le résultat est classique (en particulier le cas $n = 1$ est prouvé). On raisonne donc par récurrence en supposant que pour un $n \geq 2$, le résultat soit vrai en toute dimension $m < n$ et sous l'hypothèse que G n'est *pas* abélien.

Supposons d'abord qu'il existe un sous-espace $V \subset \mathbf{C}^n$ non trivial (distinct de $\{0\}$ et $\mathbf{C}^n$) qui soit stable par G (c'est-à-dire par tout élément de G). On choisit alors un supplémentaire W de V. Dans une base adaptée, tout élément g de G s'écrit

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

Les applications

$$\left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & g_1 = g_{|V}\end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W) \\ g & \mapsto & g_2 = \pi_W \circ g_{|W}\end{array}\right.$$

où π_W est la projection sur W parallèlement à V, sont des morphismes de groupe continus, donc d'image connexe et résoluble. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une base de V et une de W telle que toutes les matrices g_1, g_2 soit triangulaires supérieures ; dans la base obtenue par recollement, la matrice de tout élément de G est donc triangulaire supérieure.

Montrons maintenant qu'il existe toujours un sous-espace stable non trivial.
On considère $m \geq 2$ le plus petit entier non nul tel que $D^m G = \{1\}$. On pose alors $H = D^{m-1}G \neq \{1\}$, et on définit P l'ensemble des vecteurs non nuls qui sont propres pour tout élément de H. On va montrer qu'il existe un élément x dans P est que $\mathrm{Vect}(G \cdot x)$ convient.
Etape 1. On a $DH = D^m G = \{1\}$ de sorte que H est abélien donc cotrigonalisable. Il existe alors un drapeau complet stabilisé par H ; en particulier le premier espace du drapeau est une droite stable par H, engendrée par un vecteur x non nul qui est donc dans P.

Etape 2. Soit $g \in G$. Alors H est un groupe dérivé donc est distingué dans G et $g^{-1}hg$ est un élément de H. Notons λ sa valeur propre associée à x. On a :

$$h(g(x)) = gg^{-1}hg(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

de sorte que $g(x)$, qui est non nul puisque g est inversible, est dans P.

Etape 3. Soit Λ_y l'application continue qui pour $y \in P$ fixé associe à un élément h de H sa valeur propre en y. Alors on a vu précédemment que $\Lambda_{g(x)}(h) = \Lambda_x(g^{-1}hg)$, de sorte que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ g & \mapsto & \Lambda_{g(x)}(h) \end{array} \right.$$

est continue, pour un $h \in H$ donné. Son image est donc connexe mais est finie puisque incluse dans le spectre de h. L'image est alors réduite à un point et par linéarité $\mathrm{Vect}(G \cdot x)$ est un espace propre pour tout élément de H et stable par G.

Etape 4. Supposons par l'absurde que $\mathrm{Vect}(G \cdot x) = \mathbf{C}^n$. Le groupe H est ainsi constitué d'homothéties. Mais le déterminant d'un commutateur est toujours 1 ; comme $m - 1 \geq 1$, H est engendré par des commutateurs et on a donc que si $h \in H$ est une homothétie de rapport λ, $\det(h) = \lambda^n = 1$. Ainsi H est un groupe fini ; par le lemme il est connexe et donc réduit à un élément. Ceci est une contradiction, et $\mathrm{Vect}(G \cdot x)$ est un sous-espace stable non trivial.

$\square$

Remarques. Le résultat s'étend aisément à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ en ajoutant la condition que tout élément de G soit trigonalisable.

Il s'étend aussi à $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos en considérant la toplogie de Zariski sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Sur $\mathbf{C}$ cela renforce le résultat puisque la topologie de Zariski qui est moins fine a donc plus de connexes.

REFERENCES

1. A. Chambert-Loir, *Algèbre corporelle.*, Springer (2005), p.93
2. Wikipedia, *Théorème de Lie-Kolchin*, `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Lie-Kolchin`, consultée le 10/10/2017.