# 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

On considère $\mathbb{K}$ corps et $E$ $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

## I] Outils pour l'étude des endomorphismes

**Déf 1:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $f$ tq $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id) \neq \{0\}$.
- Un vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$ est un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tq $f(x) = \lambda x$.
- On note $E_\lambda$ le ss espace propre de $f$ associé à $\lambda$.
- On note $S_{\mathbb{K}} f$ l'ens. des valeurs propres sur le corps $\mathbb{K}$.

**Théorème 2:** Des ss esp. propres $E_{\lambda_i}$ où $\lambda_i \neq \lambda_j$ 2 à 2 distincts sont en somme directe.

### 1) Polynômes d'endomorphismes

**Proposition 3:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application

$$\varphi_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E), \quad P \longmapsto P(f)$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
L'image de ce morphisme notée $\mathbb{K}[f]$ est une ss algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

**Déf 4:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Un polynôme $P$ est dit annulateur de $f$ si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

**Proposition 5:** L'ens $I_f$ des polynômes annulateurs de $f$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

**Déf 6:** Le polynôme minimal de $f$ est l'unique polynôme unitaire, noté $\pi_f$, qui engendre l'idéal des poly annulateurs $I_f$.

**Thm 7:** toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur

**Thm 8:** [Lemme des noyaux] Soit $(P_k)_{k \in \{1,\dots,N\}} \in \mathbb{K}[X]^N$ 2 à 2 premiers entre eux et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, $\mathrm{Ker}\left[\prod_{k=1}^{N} P_k\right](f) = \bigoplus_{k=1}^{N} \mathrm{Ker}\, P_k(f)$

De plus, le projecteur de $\mathrm{Ker}\left[\prod_{k=1}^{N} P_k\right](f)$ sur l'un des $\mathrm{Ker}\, P_i(f)$ parallèlement à la somme des autres est un polynôme en $f$.

### 2) Polynômes caractéristiques.

**Déf 9:** Le polynôme caractéristique de $f$ de $E$ de dim $n < \infty$ est le polynôme $\chi_f$ où $\chi_f(X) = (-1)^n \det(f - X Id)$

**Ex 10:** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq $A = \mathrm{Mat}_B f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ où $B = B_{can}$
On a $\chi_f(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} (-1)^2 = (X-2)(X-3)$ $\quad 2, 3 \in S_{\mathbb{R}} f$

**Thm 11:** [Cayley-Hamilton] $\pi_f \mid \chi_f$ ie $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$
en particulier, $d^\circ \pi_f \leq \dim E$

**Rmq 12:** $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp} E_{c\lambda}$ où $E_{c\lambda}$ espace caractéristique $:= \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^{m_\lambda}$ où $m_\lambda$ multiplicité de $\lambda \in S(f)$

## II] Endomorphismes trigonalisables

### 1) Définitions et caractérisations

**Déf 12:** $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si il existe une base $B$ de $E$ ds laquelle $\mathrm{Mat}_B f$ est triangulaire.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si $A$ est semblable à une matrice triangulaire.

**Rmq 13:** Un endo $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi $A = \mathrm{Mat}_{B_{qq}} f$ est trigonalisable.

**Théorème 14:** $f$ trigonalisable $\iff$ $\chi_f$ scindé sur $\mathbb{K}$.

**Exemple 15:** sur $\mathbb{C}$, tout endo est trigonalisable

**C-E 16:** sur $\mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ $\theta \in ]0, \pi[$

**Prop 17:** $A \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisable et $S_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
Alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ $\quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{m_i}$ avec $m_i$ la multiplicité

**Prop 18:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $F$ sev de $E$ stable par $f$ (ie $f(F) \subset F$)
Soit $g = f_{|F}$ Alors $g \in \mathcal{L}(F)$ et $\chi_g \mid \chi_f$

### 2) Trigonalisation simultanée

**Thm 19:** si $f \circ g = g \circ f$ où $f, g \in \mathcal{L}(E)$ Alors (1) Tout ss esp propre de $f$ stable par $g$
(2) $\mathrm{Im} f$ stable par $g$

**Thm 20:** [Trigonalisation simultanée]
Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et commutent
Alors il existe une base de trigonalisation commune de $f$ et $g$.

**Rmq 21:** si $f \circ g = g \circ f$ et $f, g$ trigonalisables Alors $f + g$ et $f \times g$ sont trigonalisables.

**Prop 22:** si $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et si $F$ sev de $E$ par $f$
Alors $u_{|F}$ est trigonalisable

**Rmq 23:** Matriciellement, le Thm 20 se traduit : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisables tq $BA = AB$ Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient trigonalisables.

# III] Endomorphismes nilpotents

### 1) Définitions et caractérisations de la nilpotence

**Définition 24 :** On note $\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{L}(E),\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \}$ l'ens des éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$.

**Exemples 25 :** - $\varphi_A : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, $M \longmapsto AM$ où $A$ nilpotente de $M_n(\mathbb{K})$. $\varphi_A \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente

**C.E 26 :** $P \mapsto P'$ vrai sur $\mathbb{K}_n[X]$ mais non nilpotent sur $\mathbb{K}[X]$

**Définition 27 :** L'indice de nilpotence $p$ de $f$ est $p = \inf\{n \in \mathbb{N},\ f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$

Rmq : Thm de Cayley Hamilton $\Rightarrow p \leq n = \dim E$.

**Proposition 28 :** Si $f$ nilp d'indice $p$ Alors $\exists x_0 \in E$ tq $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit une famille libre.

**Proposition 29 :** [Caractérisation de la nilpotence]
Si $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dim finie $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$
Les PSSE :
(1) $f$ est nilp
(2) $\chi_f = (-1)^n X^n$
(3) $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $\Pi_f = X^p$ ($p$ est alors l'indice de $f$)
(4) $f$ est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale
(5) $f$ est trigonalisable et sa seule valeur propre est zéro
(6) $0$ est la seule valeur propre de $f$ ds tte extension algébrique de $\mathbb{K}$.

De plus, si $\mathrm{Car}(\mathbb{K}) = 0$ : (7) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $f$ et $\lambda f$ sont semblables

**Rmq 30 :** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ : l'endo $0_{\mathcal{L}(E)}$ est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de $f$.

**Prop 31 :** Si $\mathrm{Car}\,\mathbb{K} = 0$, Alors $(\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(f^k) = 0) \iff \chi_f = (-1)^n X^n \iff f$ nilpotent

**C.E 32 :** si $\mathrm{Car}\,\mathbb{K} = p > 0$ Faux
ex : $I_p$ sur $\mathbb{F}_p$

dev **Thm 33** [Burnside] Soit $G$ un gpe de $GL_n(\mathbb{C})$ tq il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall A \in G$ tq $A^N = I_n$ Alors $G$ est fini

### 2) Structure de $\mathcal{N}$

#### a) Propriétés Remarquables de $\mathcal{N}$

**Propriété 34 :** $\mathcal{N}$ est un cône si $f$ nilp Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f$ nilp

**Rmq 35 :** $\mathcal{N}$ n'est pas un ev ni un idéal de $\mathcal{L}(E)$
non stable par addition ex : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Proposition 36 :** $f, g$ nilp $\in \mathcal{L}(E)$
si $f$ et $g$ commutent Alors $f+g$ nilp et $f \circ g$ nilp.

**Proposition 37 :** $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{ f \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Tr}(f) = 0 \}$

#### b) Le cône en dim 2

**Rmq 38 :** Pour $M \in M_2(\mathbb{K})$, on obtient $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \det(M)$.
On en déduit :

**Prop 39 :** $M$ nilp $\iff \mathrm{Tr}(M) = \det(M) = 0 \iff a = -d$ et $ad - bc = 0$
avec $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$

**Rmq 40 :** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut dessiner le cône $\mathcal{N}$ en le représentant dans l'espace vectoriel de dim 3 des matrices de trace nulle $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ par l'équation $-a^2 - bc = 0$
voir annexe Figure 1.

### 3) Unipotence

**Déf 41 :** soit $\mathcal{U} = Id + \mathcal{N} = \{ u \in \mathcal{L}(E),\ \exists n \in \mathcal{N},\ u = Id + n \}$
Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés éléments unipotents.

**Prop 42 :** $u \in \mathcal{U} \iff \chi_u = (1-X)^n$

Plaçons nous dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ E de dim $< \infty$.

**Définition 43 :** $\exp(v) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{v^j}{j!} \quad \forall v \in \mathcal{L}(E)$

**Rmq 44 :** Si $v$ nilp : la somme définissant $\exp v$ est une somme finie.

**Prop 45 :** [Unipotents et Nilpotents] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'appli exp réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ n & \longmapsto & \exp(n) & \longmapsto & \exp(n) - Id \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ u & \longmapsto & u - Id & \longmapsto & \exp(u - Id) \end{array}$$

**Appli 46 :** L'appli $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

# IV Réductions des endomorphismes

### 1) Décomposition de Dunford

**Théorème 47 :** [Dunford] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\chi_f$ scindé sur $\mathbb{K}$
$\exists! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq $d$ diagonalisable et $n$ nilpotent tq
(1) $f = d + n$
(2) $n \circ d = d \circ n$
De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $f$.

dev 2

dev 2

**Appli 48** : Soit $f = d + n$ sa décompo° de Dunford tq $d = \sum_{i=1} \lambda_i p_i$ où $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $f$ et $p_i$ les projecteurs et $n = f - d$

$r_i$ l'indice de nilpotence de $n$.

Alors $\exp(f) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \left( \sum_{p=0}^{r_i - 1} \frac{(f - \lambda_i Id)^p}{p!} \right) p_i$

**Ex 49** : La Réduite de Dunford de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ est $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 2) Réduction de Jordan

### a) Pour les nilpotents $u \in \mathcal{N}$

**Théorème 50** : (1) $\mathrm{Ker}(u^i)$ stable par $u$

(2) La suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(u^i)))_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive

(3) La suite $(\mathrm{Ker}(u^i))_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion

(4) Si $\mathrm{Ker}\, u^j = \mathrm{Ker}\, u^{j+1}$ alors $\mathrm{Ker}\, u^i = \mathrm{Ker}\, u^j$ $\forall i \geq j$

**Def 51** : $(\mathrm{Ker}(u^i))$ est la suite des noyaux itérés.

**Prop 52** : Les seuls sev de $E$ stable par $u$ nilp d'indice maximal sont les $\mathrm{Ker}\, u^i$.

**Def 53** : Un bloc de Jordan $J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Prop 54** : [Endomorphisme nilpotent et bloc de Jordan]

Soient $E$ ev de dim $n < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. PSSE :

(1) $\exists \mathcal{B}$ base ds laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = J_n$

(2) $u \in \mathcal{N}$ et $\chi_u = \Pi_u$ ($u$ cyclique)

(3) $u \in \mathcal{N}$ d'indice maximal $n$

(4) $u \in \mathcal{N}$ de $\mathrm{Rg}\, u = n - 1$.

**Rmq 55** : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si $\exists \mathcal{B}_{base}$ ds laquel $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = C_{\chi_f}$ où $C_{\chi_f}$ matrice compagnon de $\chi_f$.

**Théorème 56** [Réduction de Jordan pour les nilpotents]

$u \in \mathcal{L}(E)$ nilp. $E$ dim $n < \infty$

Alors il existe une famille d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$ et une base $\mathcal{B}$ de $E$ ds laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{bmatrix} J_{n_1} & & & 0 \\ & J_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_p} \end{bmatrix}$

**Application 57** : la décomposition de Jordan donne bcp d'infos sur l'endomorphisme :

→ L'indice de nilpotence de $u$ est la taille du plus grand bloc de Jordan

→ la dim du noyau est égale au nb de blocs de Jordan.

**Rmq 56** : Les dimensions des noyaux itérés peuvent être représentées par des tableaux de Young.

### b) Cas général de réduction de Jordan

**Corollaire 57** : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont $\chi_f$ scindé, $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathrm{Sp}\, f$

Alors il existe $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,r_j}$ pour $j \in [\![1, m]\!]$ tq dans une certaine base $\mathcal{B}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}} & & \\ & & & \boxed{\lambda_m I_{d_{m,1}} + J_{d_{m,1}}} & \\ 0 & & & & \boxed{\lambda_m I_{d_{m,r_m}} + J_{d_{m,r_m}}} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est appelée la réduite de Jordan de $f$.

**Proposition 58** : $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $\chi_f$ et $\chi_g$ scindés sont semblables $\Leftrightarrow$ ils admettent la m̂ réduite de Jordan


[OA] Beck - Malick - Peyré

[GOUAL]

[GRI] Algèbre linéaire

[MANSUY] Algèbre linéaire

Figure 1