157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

- $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.
- E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
- On identifiera souvent matrice et endomorphisme.

I Similarité

A. Motivation

def 1 : A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$

Prop 2 : La similarité est une relation d'équivalence.

Rmq 3 : $A^m = PB^mP^{-1}$.

Prop 4 : Des matrices semblables sont différentes représentation d'un même endomorphisme dans différente base.

B. Nilpotence

Def 5 : Un endomorphisme u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Le plus petit de ces p est appelé indice de nilpotence de u.

Prop 6 : Si u et v commutent et sont nilpotents alors $u+v$ et $u \circ v$ le sont également.

ex 7 : $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente.

Prop 8 : L'exponentielle d'un endomorphisme nilpotent est une somme d'endomorphismes nilpotents.

Def 9 : u est unipotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = Id_E$ (avec $Id_E : E \to E,\ x \mapsto x$).

Prop 10 : u est unipotent ssi $u = v + Id_E$ avec v nilpotent.

Rmq 11 : $u^m = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} v^k$ avec p indice de nilpotence de v.

C. Diagonalisabilité

Def 12 : A est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.

Prop 13 : u est diagonalisable ssi existe une somme directe de sous-espaces stables sur lesquels u est une homothétie.

Rmq 14 : $A = P\begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}P^{-1}$

$A^k = P\begin{pmatrix}d_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k\end{pmatrix}P^{-1}$ $\quad \exp(A) = P\begin{pmatrix}e^{d_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n}\end{pmatrix}P^{-1}$

Prop 15 : Si u est diagonalisable et nilpotent alors u est l'endomorphisme nul.

D. Trigonalibilité.

Def 16 : A est trigonalisable ssi A est semblable à une matrice triangulaire.

Rmq 17 : Si A est trigonalisable et nilpotent alors A à des 0 sur sa diagonale.

Prop 18 : Si u trigonalisable et $F \subset E$ est stable alors $u_{|F}$ est trigonalisable.

Prop 19 : Si u et v commutent, alors il sont cotrigonalisable (ie : trigonalisable dans la même base)

Rmq 20 : Si u et v sont cotrigonalisables, alors $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Ex 21 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable.

II Caractérisations et définitions

A. Polynome caractéristique.

Def 22 : λ est valeur propre de u, s'il existe $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Le spectre de u, $Sp\, u$ est l'ensemble des valeurs propre de u.

Def 23 : Le polynome caractéristique, χ_u, de u est le polynome caractéristique de la matrice de u dans une base quelconque ie. $\det(A - X I_n) = \chi_A = \chi_u$

Def 24 : Le polynome minimal μ_u est le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$

Ex 25 : pour $n = 2$ $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\, A + \det A$

Thm 26 : Cayley Hamilton : $\chi_u(u) = 0$

B. Diagonalisable

Prop 27 : u est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres

Prop 28 : u est nilpotent ssi $Sp\, u = \{0\}$

C. Trigonalisable

Thm 29 : u est trigonalisable $\begin{cases} \text{ssi } \chi_u \text{ est scindé,} \\ \text{ssi } \mu_u \text{ est scindé.} \end{cases}$

Rmq 30 : - Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable

- Tout endomorphisme est trigonalisable sur le corps de décomposition de μ_u.

Ex 31 : Sur $\mathbb{F}_2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_A = X^2 + X + 1$ irreductible

Sur $\mathbb{F}_2/(X^2+X+1) = \mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]$ $\chi_A = (X - \alpha)^2$

D. Nilpotent

Thm 32 : u est nilpotent ssi $\chi_u = (-1)^n X^n$
ssi $\exists\, r < n$ tq $\mu_u = X^r$ ssi u trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$

Rmq 33 : u nilpotent implique que u trigonalisable.

Ex 34 : - Id trigonalisable mais non nilpotent

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Sp(A) = 0$ mais A n'est ni trigonalisable ni nilpotent sur $\mathbb{R}$.

Prop 35 : Si $car(\mathbb{K}) = 0$, u nilpotent $\Leftrightarrow$ $Tr(u^i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$

III Applications

Def 36 : $E_\lambda = \{x \in E, u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda Id_E)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Lemme 37 : des noyaux : $P = P_1 \cdots P_s$, les P_i premiers entre eux deux à deux, alors : $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(P_i(u))$

Rmq 38 : $E = \ker(\mu_u(u)) = \ker(\chi_u(u))$

Prop 39 : La suite des noyaux itérés $(\ker(u^q))_{q \geq 0}$ vérifie
- croissante pour l'inclusion
- si $\ker(u^q) = \ker(u^{q+1})$ alors $\ker(u^q) = \ker(u^{q+m})$
- un tel q existe en dim finie et est appelé indice de u
- $\forall k \geq 0$ $\dim(\ker u_{k+1}) - \dim(\ker u_k) \geq \dim(\ker u_{k+2}) - \dim(\ker u_{k+1})$

Prop 40 : u est nilpotent si sa suite de noyaux itérés est égale à E à partir d'un certain rang.

Rmq 41 : Si $(\dim(\ker(u^q)))_{q \geq 0} = (\dim(\ker(v^q)))_{q \geq 0}$ et u et v sont nilpotents alors u et v sont semblables.

Prop 42 : Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable sous la forme d'une matrice diagonale par bloc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$.

DEV 1

Thm 43 : Réduction de Jordan

Un bloc de Jordan est une matrice de taille $k \times k$

$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$.

Tout endomorphisme trigonalisable peut être mis sous la forme diagonale par bloc de Jordan $J_{\lambda,k}$ où λ sont les valeurs propres de u.

Thm 44 : Dunford Si u est trigonalisable, il existe un unique n nilpotent et d diagonalisable tels que

$u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$

Thm 45 : Burnside un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini ssi il est d'exposant fini.

DEV 2