158

130. Matrices symétriques réelles et hermitiennes.

(1)

Pour la suite, $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I / Symétries et tableaux de nombres :

(1) Définitions :

Def 1. On appelle matrice symétrique réelle toute matrice de l'ensemble $S_n := \{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ {}^tA=A\}$. On appelle matrice hermitienne toute matrice de l'ensemble $H_n := \{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ A^*=A\}$.

Prop 2. S_n est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un de ses supplémentaires est l'ensemble des matrices antisymétriques $AS_n = \{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tA=-A\}$.

NB 3. H_n n'est pas un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Def 4. On appelle matrice symétrique positive (resp. définie positive) toute matrice symétrique vérifiant pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ ${}^tXAX\geq 0$ (resp ${}^tXAX>0$). On appelle matrice hermitienne positive (resp. définie positive) toute matrice hermitienne vérifiant pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$,

$$X^*AX\in\mathbb{R}^+ \ (\text{resp } X^*AX\in\mathbb{R}^{+*}).$$

On note ces ensembles S_n^+, S_n^{++}, H_n^+ et H_n^{++}.

Prop 5. (Sylvester) $A=(a_{i,j})_{i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, symétrique ou hermitienne selon le corps, est définie positive si, et seulement si, pour tout $p\in[\![1;n]\!]$, on a $\det(a_{i,j})_{i,j\leq k}>0$.

(2) Structure de H_n :

Prop 6. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})=\{A+iB\ ;\ (A;B)\in H_n^2\}$

Def 7. ($A\leq B \iff A-B\in H_n^+$) définit une relation d'ordre sur H_n.

Prop 8. $(H_n;\leqslant)$ vérifie la propriété de la borne supérieure.

II / Endomorphismes autoadjoints en dimension finie :

E désigne un espace euclidien ou hermitien, on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire.

Def-Prop 9. Soit $f\in L(E)$. Il existe un unique élément de $L(E)$, noté f^* et appelé adjoint de f, tel que, pour tous $x,y\in E$, $(f(x)|y)=(x|f^*(y))$. Si B est une base orthonormée de E, alors $Mat_B(f^*)=Mat_B(f)^*$ si E est hermitien et $Mat_B(f^*)={}^tMat_B(f)$ si E est euclidien.

Def 10. Si $f=f^*$, on dit que f est autoadjoint.

Prop 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence de :
(1) Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = {}^tPDP$
(2) $A \in S_n$

Prop 12. Soit $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et D, diagonale réelle, telles que $A = P^*DP$.

NB 13. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est "symétrique complexe" mais n'est pas diagonalisable.

Th 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il y a équivalence de : (1) $[A ; A^*] = 0$
(2) $\exists P \in U_n(\mathbb{C})$, D diagonale tq $A = P^*DP$

Th 15. Soit $H \in H_n^+$. Il existe une unique matrice $R \in H_n^+$ telle que $H = R^2$

Prop 16. Soient $A, B \in H_n$ (resp. S_n) qui commutent. Il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ (resp $O_n(\mathbb{R})$) telle que P^*AP et P^*BP (resp ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$) soient diagonales.

DVP1

Th 17. L'exponentielle réalise un homéomorphisme de S_n dans S_n^{++} et de H_n dans H_n^{++}.

Th 18. (décomposition polaire) Les applications

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad (Q;S) \longmapsto QS$$

et

$$U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad (Q;S) \longmapsto QS$$

sont des homéomorphismes. De plus,

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (Q;S) \longmapsto QS$$

et

$$U_n(\mathbb{C}) \times S_n^{+} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad (Q;S) \longmapsto QS$$

sont surjectives (mais pas injectives).

DVP2

NB 19. On a donc un homéomorphisme

$$U_n(\mathbb{C}) \times H_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad (Q;H) \longmapsto Q\exp(H)$$

qui étend l'homéomorphisme de la décomposition polaire de $\mathbb{C}$ avec "$\exp(H) = r$" et "$Q = e^{i\theta}$".

III / Symétries et formes bilinéaires et sesquilinéaires :

E $\mathbb{K}$-ev et φ forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire symétrique. ($\dim E = n$)

Def 20. Soit $\mathcal{B} = (e_1 ; \dots e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$

(3)

la matrice $Mat_B(\varphi) := (\varphi(e_i; e_j))_{i,j \leq n}$

Prop 21. Soient B, B' deux bases de E et soit P la matrice de passage de B à B'.

(1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Mat_B(\varphi) \in S_n$ et

$$Mat_{B'}(\varphi) = {}^tP\, Mat_B(\varphi)\, P$$

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $Mat_B(\varphi) \in H_n$ et

$$Mat_{B'}(\varphi) = P^* Mat_{B'}(\varphi)\, P$$

Def 22. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ (resp $M_n(\mathbb{C})$), on dit que A et B sont congrues s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp $GL_n(\mathbb{C})$) telle que $A = {}^tPBP$ (resp $A = P^*BP$).

Th 23. (loi d'inertie de Sylvester)
Soit $A \in S_n$ (resp. H_n). Il existe un unique couple $(p;q) \in [\![1;n]\!]^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) tels que

$$P^*AP = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = Mat_B \Phi$ où B est une base de E et Φ une forme quadratique ou hermitienne, on dit que (p,q) est la signature de Φ.

Th 24. (minimax) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. On ordonne son spectre par ordre croissant : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et on note, pour $i \in [\![1;n]\!]$, $\mathcal{F}_i$ l'ensemble des sev de dimension i. On a pour tout i :

$$\lambda_i = \min_{F \in \mathcal{F}_i} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (Ax|x) = \max_{F \in \mathcal{F}_{n+1-i}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (Ax|x)$$

Application 25. $A \in S_n$. Soit B la matrice obtenue en enlevant la k-ème ligne et la k-ème colonne de A. Les valeurs propres de A sont entre celles de B.

DVP 3

IV / Applications :

① Optimisation :

Ex 26. En diagonalisant les matrices des formes quadratiques, on peut calculer le maximum de $q(x)e^{-\|x\|^2}$ sur $\mathbb{R}^n$, ou de $\dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

② Topologie et géométrie :

Ex 27. Les matrices inversibles de signature $(p;q)$ sont un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Ex 28. S_n^{++} est un demi-cone convexe épointé.

③ Statistiques et ingénierie :

Ex 29. Le th. spectral permet de diagonaliser les matrices d'inertie d'un solide ou dans le cadre de l'analyse en composante principale.

Ref: Gondon

M-T.

Zhang - Fuzhen : Matrix Theory