158

Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

<u>Cadre</u>. On se place dans $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel euclidien (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou hermitien (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). On notera $n = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in⟦1,n⟧}$ une base de E.

I) Lien entre matrices symétriques et algèbre bilinéaire

1) Formes bilinéaires et sesquilinéaires

<u>Def 1</u> On dit que $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) et si elle est linéaire à droite et linéaire (resp. antilinéaire) à gauche.

<u>Représentation matricielle</u> : pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ dans E, $\varphi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i,e_j) = {}^tXMY$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $M = (\varphi(e_i,e_j))_{i,j\in⟦1,n⟧} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On dit que M est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\varphi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i y_j \varphi(e_i,e_j) = {}^t\bar{X}MY$.

<u>Changement de base</u> : si M représente φ dans $\mathcal{B}$ et M' représente φ dans une autre base $\mathcal{B}'$, $M' = {}^tPMP$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $M' = {}^t\bar{P}MP$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On dit alors que M et M' sont congrues, elles ont même rang : le rang de φ.

<u>Def 2</u> φ, une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire), est dite symétrique (resp. hermitienne) si : $\forall (x,y)\in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (resp. $\forall (x,y)\in E^2, \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$) et antisymétrique si $\forall (x,y)\in E^2, \varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.

<u>Prop 3</u> Une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) φ est symétrique (resp. hermitienne) si et seulement si sa matrice M dans $\mathcal{B}$ est symétrique (resp hermitienne) ie ${}^tM = M$ (resp $M^* := {}^t\bar{M} = M$)

2) Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

On note $\mathcal{S}_n$ (resp $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{H}_n$) l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp antisymétriques réelles, hermitiennes).

<u>Prop 4</u> $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{H}_n = \mathcal{S}_n \oplus i\mathcal{A}_n$.

En pratique, $A = \underbrace{\frac{A+{}^tA}{2}}_{\in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{A-{}^tA}{2}}_{\in \mathcal{A}_n}$.

<u>Rq</u> $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$

<u>Prop 5</u> - A antisymétrique réelle $\Rightarrow \forall i \in ⟦1,n⟧, a_{ii} = 0$

- A hermitienne $\Rightarrow \forall i\in⟦1,n⟧, a_{ii} \in \mathbb{R}$.

3) Formes quadratiques définies-positives

<u>Def 6</u> On dit que $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique | hermitienne si : $\forall x\in E, q(x) = \varphi(x,x)$ avec φ une forme bilinéaire symétrique si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et sesquilinéaire hermitienne si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

<u>Prop 7</u> Si q est une forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que : $\forall x\in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. On dit alors que φ est la forme polaire de q. (idem dans le cas complexe)

On a alors (cas réel) : $\forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$

(cas complexe) : $\forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left(q(x+y)-q(x-y)-iq(x+iy)+iq(x-iy)\right)$

Def 8 Une forme quadratique (resp hermitienne) q est dite positive si : $\forall x\in E,\ q(x)\geq 0$ et définie-positive si, pour $x\in E$, $q(x)=0 \Rightarrow x=0$ et q est positive. (même chose pour négative)

Def 9 Une matrice symétrique réelle (resp hermitienne) est dite positive ou définie-positive si sa forme quadratique associée l'est. On note $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ (resp $\mathcal{H}_n^+$ et $\mathcal{H}_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques réelles positives et définies positives (resp hermitiennes positives et définies-positives)

II Adjoint, réduction et décompositions

1 Adjoint d'un endomorphisme

Def 10 Si $u\in\mathcal{L}(E)$, l'unique $u^*\in\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$ est appelé l'adjoint de u.

Rq Si $\mathcal{B}$ est orthonormée et $M=[u]_{\mathcal{B}}$, alors $[u^*]_{\mathcal{B}}=M^*$. (où $M^*={}^tM$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $M^*={}^t\overline{M}$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Def 11 Un endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint si $u^*=u$.

Prop 12 - $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: u est auto-adjoint $\Leftrightarrow {}^tM=M$

- $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: u est auto-adjoint $\Leftrightarrow {}^t\overline{M}=M$

(où $M=[u]_{\mathcal{B}}$ avec $\mathcal{B}$ orthonormée)

On dit alors que u est un endomorphisme symétrique (resp. hermitien).

2 Réduction de matrices symétriques réelles et hermitiennes

Thm 13 (spectral) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u et les valeurs propres de u sont réelles.

Def 14 On note $\mathcal{O}_n$ (resp $\mathcal{U}_n$) l'ensemble des matrices orthogonales (resp unitaires) ie telles que $MM^*=I_n$.

Thm 13 (version matricielle) Soit $M\in\mathcal{S}_n$ (resp $\mathcal{H}_n$). Alors $\exists\, C\in\mathcal{O}_n$ (resp $\mathcal{U}_n$) telle que $C^{-1}MC=C^*MC=D$ avec D matrice diagonale réelle.

Application 14 Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $M\in\mathcal{S}_n^+$ (resp $\mathcal{S}_n^{++}$) si et seulement si les valeurs propres de M sont positives (resp. strictement positives). (même chose pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Thm 15 (inertie de Sylvester) Soit $M\in\mathcal{S}_n$. Alors M est congrue à

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1 & \ddots & 1}_{p} & \underbrace{-1 & \ddots & -1}_{q} & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Def 16 On définit la signature d'une forme quadratique $\tilde{q}$ par $\mathrm{sign}(\tilde{q}) = (p,q)$

Ex 17 $M = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ correspond à une forme quadratique de signature (n,n).

Thm 18 (pseudo-réduction simultanée) Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}$ (resp $\mathcal{H}_n^{++}$) et $N \in \mathcal{S}_n$ (resp $\mathcal{H}_n$). Alors $\exists C \in GL_n(\mathbb{K})$ /

$C^*MC = I_n$ et $C^*NC = D$ matrice diagonale réelle.

Application 19 : ellipsoïde de John-Loewner.

3) Décompositions

Prop 20 Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$. Alors il existe un unique $B \in \mathcal{S}_n^+$ tel que $A = B^2$. De plus B est un polynôme en A.

Rq également vrai avec A et B dans $\mathcal{H}_n^+$

Ex 21 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Thm 22 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A s'écrit $A = OS$ avec $O \in O_n$ et $S \in \mathcal{S}_n^+$. Si de plus on suppose A inversible, $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et le couple (O,S) est unique

DVP 1

Application 23 (points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$) Soit $B = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, |||u||| \leq 1\}$. Si E est euclidien, alors les points extrémaux de B (ie les u de B tels que $B \setminus \{u\}$ est convexe) sont exactement les éléments de $O(E)$

III Applications

1) En analyse

Thm 24 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $a \in U$ tel que $df_a = 0$ et $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ $(\in \mathcal{S}_n)$ la matrice hessienne de f en a. Alors :

- f admet un min. (resp max.) relatif en $a \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^+$ $(\mathcal{S}_n^-)$
- $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ (resp $\mathcal{S}_n^{--}$) $\Rightarrow f$ admet un min (resp max) en a.

Ex 25 en dimension 2, $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $\det A = rt - s^2$

si $\det A > 0$, a est un min ou un max relatif.

si $\det A < 0$, a n'est pas un extremum

si $\det A = 0$, le théorème ne nous permet pas de conclure.

Prop 26 Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n$ et inversible. Alors il existe un voisinage de A_0 de matrices congrues à A_0.

Application 27 (lemme de Morse) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ soit non dégénérée et de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$.

2) Calcul de l'inverse d'une matrice par méthode itérative

DVP 2

Oubli : après la définition 9, caractérisation de Sylvester :
Si $A \in S_n$, $A \in S_n^{++}$ ssi tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

<u>Références</u>

	Gourdon (Algèbre)	
	Grifone, Algèbre linéaire	
	Gourdon (Analyse)	(matrice hessienne)
	Oraux X-ENS Algèbre 3	(DVP 1, 2 / racine carrée, pseudo-réduction, caractérisation de Sylvester)
	Rouvière, Petit guide de calcul différentiel	(lemme de Morse)