158 — Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

I – Lien avec l'algèbre bilinéaire (sesquilinéaire) :

Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$-ev (resp. $\mathbb{C}$-ev) de dimension finie n.

Déf : $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) si elle est linéaire à droite et à gauche (resp. linéaire à droite et anti-linéaire à gauche). Elle est dite symétrique (resp. hermitienne) lorsque : $\forall x,y\in E,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.
(resp. : $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$)

• Une application $q : E\to\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est une forme quadratique (resp. hermitienne) lorsqu'elle s'écrit : $\forall x\in E,\ q(x)=\varphi(x,x)$ avec φ une fbs (resp. fsh).

ex : • Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, $\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle$ est une fbs.
• Dans $M_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A,B)=\mathrm{tr}(A^*B)$ est une fsh.

Prop : Si q est une forme quadratique sur E (resp. hermitienne) $\exists!$ fbs (resp. fsh) φ associée.

1 – Représentation matricielle des formes quadratiques (hermitiennes) :

Si $\mathcal{B}$ est une base de E et φ une fbs (resp. fsh) sur E, si $x=\sum x_ie_i$ et $y=\sum y_ie_i$ dans E, alors :
$$\varphi(x,y)=\sum_{1\le i,j\le n}\overline{x_i}y_j\,\varphi(e_i,e_j)$$

Déf : Notons $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. hermitiennes) de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. de $M_n(\mathbb{C})$), i.e vérifiant : $\boxed{M=M^*}$
avec $M^*={}^t\overline{M}$ $(={}^tM$ si $M\in M_n(\mathbb{R}))$

Déf : On définit la matrice de φ (ou de q) dans $\mathcal{B}$ par :
$$\mathrm{Mat}\,M_{\mathcal{B}}(\varphi)=[\varphi(e_i,e_j)]_{1\le i,j\le n}\in S_n(\mathbb{R})\ (\text{resp. } H_n(\mathbb{C})).$$
Et on a : $\forall x,y\in E,\ \varphi(x,y)=x^*.M_{\mathcal{B}}(\varphi).y$

Prop : À $\mathcal{B}$ fixé, cela induit une bijection entre les fbs de E (resp. les fsh de E) et $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$).

2 – Matrices congruentes :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit q une forme quadratique (hermitienne) alors
$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(q)=P^*.M_{\mathcal{B}}(q).P}$$

Remarque : Cela définit une action de $Gl_n(\mathbb{K})$ par congruence sur $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) :
$\forall P\in Gl_n(\mathbb{R})$ (resp. $Gl_n(\mathbb{C})$) et $A\in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) :
$$\boxed{P.A=P^*AP}$$
Deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) sont congruentes lorsqu'elles sont dans la même orbite.

3 – Matrices définies positives :

Déf : $A\in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $\in H_n(\mathbb{C})$) est dite positive (on note $S_n^+(\mathbb{R})$ et $H_n^+(\mathbb{C})$) ou définie positive (on note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$ leur ensemble) lorsque la forme q associée l'est.

Thm : (Caractérisation de Sylvester des éléments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$)
Si $M\in S_n(\mathbb{R})$, alors M est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont >0

ex : $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, mais $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\notin S_n^{++}(\mathbb{R})$

Développements possibles :
- Étude de $O(p,q)$ ...
- Génératrices extrémales du cône $S_n^+(\mathbb{R})$ (Alessandri)
- Points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ (Alessandri ou Oraux X-ENS)
- Lemme de Morse
- Ellipsoïde de John-Loewner
- Réduction des endomorphismes normaux.

II - Réduction des matrices symétriques et hermitiennes :

1 - Réduction des matrices symétriques :

Loi d'inertie de Sylvester : Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $p,q \in \mathbb{N}$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPSP = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & & \\ & \boxed{-I_q} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$.

Déf : Le couple (p,q) s'appelle la signature de S, c'est un invariant total pour l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ par congruence sur $S_n(\mathbb{R})$.

Théorème : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée, à valeurs propres réelles.
Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$, $\begin{cases} {}^tOSO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \lambda_i \in \mathbb{R} \end{cases}$

2 - Pseudo-réduction simultanée :

Propriété : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$, et q_A et q_B les formes quadratiques telles que : $\begin{cases} M(q_A)_{bc} = A \\ M(q_B)_{bc} = B \end{cases}$.
Alors il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour q_A et orthogonale pour q_B.

Application : Ellipsoïde de John-Loewner :
Si K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique ellipsoïde de volume minimal le contenant.

Corollaire : Si G est un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^n)$, il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ associé à une forme q tel que : $G \subset O(q)$.

3 - ...

Cadre : $\mathbb{C}^n$ munit du produit scalaire hermitien usuel.

Déf : On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ est <u>normal</u> lorsque u et u^* commutent. On définit de même les matrices normales.

Thm : Tout endomorphisme normal est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire : Si $M \in H_n(\mathbb{C})$, $\exists U \in U_n(\mathbb{C})$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $U^*MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

III - Considérations topologiques et géométriques :

1 - À propos de $S_n(\mathbb{R})$:

Proposition :
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$
- $S_n^+(\mathbb{R})$ est un cône convexe d'intérieur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème : Les génératrices extrémales du cône S_n^+ sont exactement les demi-droites $\mathbb{R}^+S$ avec S appartenant aux projecteurs orthogonaux de rang 1.

2 - Racines carrées et exponentielle :

Proposition : L'application $S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A \longmapsto A^2$ est un homéomorphisme (de même dans $H_n^{++}(\mathbb{C})$).
Donc on peut parler sans ambiguïté que la racine carrée $\sqrt{A} \in S_n^{++}$ d'un élément $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

→ Proposition : Les applications suivantes sont des homéomorphismes : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\exp : H_n(\mathbb{R}) \to H_n^{++}(\mathbb{R})$

③ - Décomposition polaire :

Théorème : La multiplication induit des homéomorphismes :

(i) $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$(O, S) \longmapsto OS$

(ii) $U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$(U, H) \longmapsto UH$

• Corollaire 1 : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$: $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

Corollaire 2 : (maximalité du groupe orthogonal)
Le seul sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même.

Application 1 : L'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ est O_n. DVP 1

Application 2 : Si $O(p,q)$ désigne le groupe orthogonal de la forme quadratique standard de signature (p,q), alors on a un homéomorphisme :

$$\boxed{O(p,q) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}}$$

Corollaire : $O(p,q)$ est compact si et seulement si $p=0$ ou $q=0$.

• Si ce n'est pas le cas il a 4 composantes connexes.

IV - Application à la géométrie différentielle :

① - Recherche d'extrémas locaux :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $a \in U$ un point critique (ie $df(a) = 0$).

→ Thm : Soit $H \in S_n(\mathbb{R})$ la Hessienne de f en a.
(i) Si a est un minimum local (resp. max. local) alors H est positive (resp. négative).
(ii) Si H est définie positive (resp. déf. négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en a.

• Ex : en dimension 2, si $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, alors :

(i) $rt - s^2 > 0 \Rightarrow a$ est un minimum ou un maximum local.

(ii) $rt - s^2 < 0 \Rightarrow a$ n'est pas un extremum local.

(iii) $rt - s^2 = 0 \Rightarrow$ on ne peut rien dire a priori.

② - Lemme de Morse :

→ Résultat : Si $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible, il existe un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ formé de matrices congrues à A_0.

→ Application : Lemme de Morse. DVP 2

Références :
• Histoires Hédonistes de groupes et géométries (Caldero, Germoni), Tome 1.
• Oraux X-ENS, Algèbre 3
• Michel Alessandri : Thèmes de Géométrie
• Rouvière.

Lemme de Morse

Notations

$Jf(a)$ désigne la matrice jacobienne de f en a
$Hf(a)$ désigne la matrice hessienne de f en a

Proposition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit $f \in C^3(U, \mathbb{R})$ telle que $Jf(0) = 0$ et $Hf(0)$ est inversible de signature $(p, n-p)$. Alors il existe des voisinages ouverts V et W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1 difféomorphisme $\varphi : V \to W$ tel que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in V \cap U$

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

où $u = \varphi(x)$

DEMO D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour $x \in B(0,r) \subset U$

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\, {}^t x \, Hf(tx)\, x \, dt$$
$$= {}^t x \underbrace{\int_0^1 (1-t) \, Hf(tx) \, dt}_{Q(x)} \, x$$

La fonction Q est de classe C^1 de $B(0,r)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $Q(0) = \frac{1}{2} Hf(0)$ est inversible

On admet provisoirement le lemme suivant
Si $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage ouvert W de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : W \to M_n(\mathbb{R})$

de classe C^1 telle que $\mathrm{Im}\,\Psi \subset GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M \in W$, $M = {}^t\Psi(M)\, A_0\, M$

Ainsi $\beta(x) - \beta(0) \overset{?}{=} {}^t x\, {}^t\Psi(\varphi(x))\, \varphi(0)\, \Psi(\varphi(x))\, x$

Or il existe P inversible tq ${}^tP\varphi(0)P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

donc $\beta(x) - \beta(0) \overset{?}{=} {}^t\phi(x) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \phi(x)$

où $\phi(x) = P\Psi(\varphi(x))x$. La fonction ϕ est C^1 (au voisinage de 0) et $D\phi(0) = P\Psi(\varphi(0))$ est inversible. On applique finalement le théorème d'inversion locale.

DEMONSTRATION DU LEMME

On pose $\Phi : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \to & {}^tM A_0 M \end{array}$

Φ est C^1 et $D\Phi(I)[H] = A_0H + {}^t(A_0H)$

donc $\ker D\Phi(I) = A_0^{-1} A_n(\mathbb{R})$

On applique alors le théorème d'inversion locale à la restriction $\Phi : A_0^{-1} S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$

On restreint le domaine pour que l'inversion soit à valeur dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$

Points extremaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée associée. On note $B = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| \leq 1\}$

Proposition L'ensemble des points extremaux de B est $O(n)$

DEMO étape 1 : les éléments de $O(n)$ sont extremaux

- Tout élément de $O(n)$ est de norme 1 donc $O(n) \subset B$
- Soit $M \in O(n)$, on suppose que

$$M = tU + (1-t)V \quad \text{avec } t \in]0,1[,\ U, V \in B$$

Par $\|x\| = 1$, on a

$$\begin{aligned}
1 = \|x\| = \|Mx\| &= \|tUx + (1-t)Vx\| && (1)\\
&\leq t\|Ux\| + (1-t)\|Vx\| && (2)\\
&\leq t\|U\| + (1-t)\|V\| && (3)\\
&\leq t \times 1 + (1-t) \times 1 = 1 && (4)
\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les lignes sont égales

$(2) = (4) \implies \|Ux\| = 1, \ \|Vx\| = 1$

$(1) = (2) \implies Ux$ et Vx sont positivements liés

donc $Ux = Vx$. On conclut que $U = V = M$.

étape 2 : il n'y a pas d'autres points extremaux

Soit $M \in B \setminus O(n)$, soit (Ω, S) la décomposition polaire de M. D'après le théorème de réduction des matrices symétriques (positives)

$$S = O^{-1} D O \quad \text{avec} \quad O \in O(n)$$
$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

Comme $\|S\| = \|M\| \leq 1$, on a $\lambda_n \leq 1$. De plus $\lambda_1 < 1$ sinon $S = I_n$ et $M \in O(n)$

La relation $\lambda_1 \in]-1,1[$ s'écrit

$$\lambda_1 = t \times 1 + (1-t)(-1) \quad \text{avec } t \in]0,1[$$

d'où $\quad D = tD_1 + (1-t) D_2 \quad$ où $D_1 = \mathrm{diag}(1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$
$D_2 = \mathrm{diag}(-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

puis $\quad S = tS_1 + (1-t) S_2 \quad$ où $S_i = O^{-1} D_i O$

et $\quad M = t(\Omega S_1) + (1-t)(\Omega S_2)$

Application La boule unité est l'enveloppe convexe de $O(n)$

M