158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Contexte. On se place dans un espace vectoriel réel E de dimension finie.

I Liens entre formes sesquilinéaires et matrices

Définition 1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une forme hermitienne est une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, antilinéaire par rapport à la première variable, linéaire par rapport à la seconde, et vérifiant : $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$, $\forall x, y \in E$.

Le cas réel. Si h est à valeurs réelles, on dit que h est une forme bilinéaire symétrique.

Définition 2. Soit h une forme hermitienne sur E, et $\{e_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E. On définit la matrice de h dans la base $\{e_i\}_i$ par

$$\mathrm{Mat}(h)_{e_i} = \begin{pmatrix} h(e_1,e_1) & \cdots & h(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ h(e_n,e_1) & \cdots & h(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Remarque 3. Si $H = M(h)_{e_i}$, alors ${}^t\overline{H} = H$. On dit qu'une matrice est hermitienne si ${}^t\overline{H} = H$.

Dans le cas réel, on parle de matrices symétriques.

Proposition 4. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 5. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M \}$.

Remarque 6. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, et $H = \mathrm{Mat}(h)_{e_i}$, alors $h(x,y) = {}^t\overline{X} H Y$

Si $P = \mathrm{Mat}_{e_i \to e_i'} \in GL_n(\mathbb{R})$, $X = PX'$, $Y = PY'$, alors $H' = \mathrm{Mat}(h)_{e_i'} = {}^t\overline{P} H P$

Attention : il ne faut pas confondre les changements de base des applications linéaires ($H' = P^{-1}HP$) et ceux des applications bilinéaires. La notion de déterminant n'est d'ailleurs pas bien définie : il n'y a pas invariance par changement de base car $\det {}^t\overline{P} \neq \det P^{-1}$.

Définition 7. Si une forme hermitienne h est définie positive, on dit que h est un produit scalaire hermitien.

Proposition 8. h est un produit scalaire si, et seulement si, sa matrice H a ses valeurs propres strictement positives.

Remarque 9. Si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien alors $\mathrm{Re}(\langle \cdot , \cdot \rangle)$ est un produit scalaire euclidien sur l'espace sous-jacent, et $\mathrm{Im}(\langle \cdot , \cdot \rangle)$ est une forme symplectique (i.e une forme bilinéaire alternée non-dégénérée).

II Diagonalisation des matrices hermitiennes

On identifie par la suite les matrices aux endomorphismes de E associés (algèbre linéaire).

Définition 10. Un espace hermitien est un espace muni d'un produit scalaire hermitien.

Définition 11. Un endomorphisme f d'un espace hermitien E est dit auto-adjoint si $f^* = f$, c'est-à-dire si

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y \in E.$$

Proposition 12. Si $\{e_i\}_i$ est une base orthonormée de E, et $A = Mat(f)_{e_i}$, alors f est auto-adjointe si, et seulement si, ${}^t\bar{A} = A$.

Remarque 13. Si la base n'est pas orthonormée, on a (avec Q la matrice du produit scalaire hermitien),

$${}^t\bar{A}\, Q = QA.$$

Proposition 14. Si f est un endomorphisme auto-adjoint, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

Définition 15. Un endomorphisme f est normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$. $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si ${}^t\bar{A} A = A\, {}^t\bar{A}$.

Remarque 16. Les matrices symétriques réelles, anti-symétriques réelles, hermitiennes, orthogonales et unitaires sont toutes normales. $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ est aussi normale.

Théorème 17. Toute matrice normale est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et les espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$.
Si A est normale, il existe U unitaire telle que $A' = {}^t\bar{U} A U$ soit diagonale.

Dans le cas réel : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Proposition 18. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$ diagonale. (orthogonalisation simultanée)

Application 19. Une conique à centre a des axes de symétries orthogonaux.

III) Classifications, décompositions et applications

a) Classification de Sylvester

Définition 20. Soit h une forme hermitienne sur E. Une base $\{e_i\}_i$ est orthogonale pour h si $h(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. On a alors $Mat(h)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ $a_i \in \mathbb{R}$.
$\{e_i\}_i$ est orthonormée si $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (et alors $Mat(h)_{e_i} = I_n$)

Remarque 21. Si h possède des vecteurs isotropes ($\overset{\circ}{x}$ tels que $h(x,x)=0$) E ne possède pas de base orthonormée. En revanche, il existe toujours des base orthogonales.

Théorème 22. Soit h une forme hermitienne sur E, et q la forme quadratique associée ($q(x)=h(x,x)$). Alors il existe une base orthogonale $\{e_i\}_i$ de E telle que

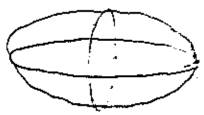
$$Mat(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire telle que si $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\tilde{q}(x)=|x_1|^2+\dots+|x_p|^2-|x_{p+1}|^2-\dots-|x_r|^2$

où $r=Rg(h)$.

L'entier p ne dépend pas de la base choisie et le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de h.

Classification des quadriques de $\mathbb{R}^3$

Ellipsoïde $sgn=(3,0)$ 	Hyperboloïde à une nappe $sgn=(2,1)$	Hyperboloïde à deux nappes $sgn=(1,2)$
Cylindre elliptique $sgn=(2,0)$	Cylindre hyperbolique $sgn=(1,1)$	Réunion de deux plans parallèles $sgn=(1,0)$

b) Décomposition polaire et applications

Théorème 23. Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe U unitaire et H hermitienne positive telles que $A=UH$. Si A est inversible, le couple ainsi défini est unique.

Dans le cas réel, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A=OS$ avec $O\in O_n(\mathbb{R})$ et $S\in S_n^+(\mathbb{R})$.

Application 24. Si E est euclidien, on note $B=\{u\in\mathcal{L}(E), \|u\|\leq 1\}$. Alors les points extrémaux de B sont les applications orthogonales ($O(E)$).

DEV. 1

Application 25. $O_n(\mathbb{R})$ est maximal dans les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Application 26. (Lemme de Morse) Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $Df(0)=0$, et $D^2f(0)$ non-dégénérée, $sgn(D^2f(0))=(p,n-p)$. Alors, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $x\mapsto u=\varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0)=0$ et

$$f(x)-f(0)=u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_n^2.$$

DEV 2