Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

158

Selon les cas, on notera $(E, \langle .,. \rangle)$ pour désigner un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire euclidien, ou pour désigner un $\mathbb{C}$-ev muni d'un produit scalaire hermitien.

I Matrices autoadjointes, réduction.

1. Matrices symétriques, matrices hermitiennes.

Déf 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$; hermitienne si ${}^t\overline{A} = A$. On note S_n (resp H_n) l'ensemble des matrices réelles symétriques (resp matrices hermitiennes).

Ex 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in S_n$, $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \in H_n$, $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & i \end{pmatrix} \notin H_n$.

Prop 3 : S_n est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. H_n est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n^2.

2. Réduction

Prop 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il existe une unique $A^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$. A^* est appelé adjoint de A.

Rem 5 : Dans le cas réel, $A^* = {}^tA$. Dans le cas hermitien, $A^* = {}^t\overline{A}$.

Déf 6 : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est autoadjointe si $A^* = A$.
On dit (dans le cas hermitien) que A est normale si $AA^* = A^*A$.

Rem 7 : A autoadjointe $\Rightarrow$ A normale.

Th 8 (spectral) : Soit $A \in S_n$ (resp H_n). Alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

3. Autres décompositions.

Déf 9 : $A \in S_n$ (resp H_n) est dite positive si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$. On note S_n^+ (resp H_n^+) l'ensemble de ces matrices.

Coro 10 : Soit $A \in S_n^+$ (H_n^+), alors il existe $B \in S_n^+$ (H_n^+) telle que $A = B^2$.

Coro 11 (décomposition polaire) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $(U, H) \in U_n \times H_n$ tel que $A = UH$. Si A est inversible, (U, H) est alors unique.

Coro 12 Notons B la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\|.\|_2$. Alors $\mathrm{Extr}\, B = O_n(\mathbb{R})$.

II Produits scalaires et formes quadratiques.

1. Formes bilinéaires, produit scalaires.

Déf 13 : On dit que $A \in S_n$ est définie positive si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. On note S_n^{++} l'ensemble de ces matrices.

Prop 14 (caractérisation de Sylvester). Soit $A \in S_n$. Alors $A \in S_n^{++}$ ssi tout les mineurs principaux de A sont strictement positifs.

Prop 15: La donnée d'une forme bilinéaire b est équivalente à la donnée de $A \in S_n$ via $b(x, y) = {}^t x A y$

La donnée d'un produit scalaire $(.|.)$ est équivalente à la donnée de $A \in S_n^{++}$ via $(x|y) = {}^t x A y$

Coro 16: Soit $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$. Alors A et B sont co-diagonalisables en base orthonormée.

Rem 17: Les énoncés précédents s'adaptent dans le cas hermitien.

2. Formes quadratiques.

Déf 18: Soit $A \in S_n$. On appelle forme quadratique associée à A l'application

$$q: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & {}^t x A x \end{array}$$

Ex 19: Pour $A = I_n$, la forme quadratique est la norme associée au produit scalaire, au carré: $q(x) = \|x\|^2 := \langle x, x \rangle$.

Déf 20: On définit l'action par congruence de $O_n(\mathbb{R})$ sur S_n comme suit: pour $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $A \in S_n$: $P \cdot A := P A {}^t P$.

Rem 21: Cela correspond à un changement de base pour q: $q({}^t P x) = {}^t x (P A {}^t P) x$

On s'intéresse à décrire les orbites de cette action.

Th 22 (Sylvester): Soit $A \in S_n$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, et $0 \leq p \leq r \leq n$ tels que

$$P A {}^t P = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & 0 \\ \hline & -I_{r-p} & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right) =: I_{p,r}.$$

Les entiers p, r ne dépendent pas de la base ambiante.

Déf 23: On appelle $(p, r-p)$ la signature de A.

Déf 24: Soit $A \in S_n$. La forme quadratique q associée est dite non dégénérée si $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Rem 25: Dans ce cas, il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $\mathrm{Sign}(A) = (p, n-p)$.

Th 26 (Lemme de Morse): Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, voisinage ouvert de 0. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $Df(0) = 0$ et que $D^2 f(0)$ soit non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. **DEV**

Alors il existe U, V voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme tel que $\varphi(0) = 0$ et pour $x \in U$:

$$f(x) - f(0) = {}^t \varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$$

3. Le cas hermitien

Rem 27: Les énoncés 18 à 21 s'adaptent dans le cas hermitien. Dans ce cadre, l'énoncé 22 devient:

Th (Sylvester 2) 28: Soit $A \in H_n$. Alors il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$, et $r \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$P A P^* = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

L'entier r ne dépend pas de la base ambiante.

III Utilisation pratique

Exe 29 : Équation de Laplace $-\Delta u = f$, devient à travers un schéma aux différences finies :
$-Au = b$, où $A = n^2 \,\mathrm{tridiag}(1,-2,1)$, $u = (u_j)_j$, $b = (f(x_j))_j$

1. Décomposition de Choleski.

Th 30 : Soit $A \in S_n^{++}$. Alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure, telle que $A = B^t B$.
Il existe un unique tel B dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

2. Gradient à pas optimal.

Lemme 31 : Soit $A \in S_n^{++}$. Alors pour $x \in E$:

$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4$$

où $\lambda_1 := \min\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$; $\lambda_n := \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$.

Algo 32 : $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Puis

$$d_k = \nabla f(x_k) \; ; \; \rho_k := \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle} \; ; \; x_{k+1} := x_k - \rho_k d_k$$

où $f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Th 33 : Si $A \in S_n^{++}$, alors Algo 32 converge vers le minimum de f u, qui vérifie $Au = b$.

$\boxed{\text{DEV}}$

3. Gradient conjugué

Déf 34 : Soit $A \in S_n^{++}$. La famille $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est dite conjuguée à A si $\forall i \neq j$, $e_i \perp_A e_j$

Algo 35 : $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Puis tant que $\nabla f(x_k) \neq 0$:

$$d_k := \nabla f(x_k) + \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2} d_{k-1}$$

$$r_k := \frac{\langle \nabla f(x_k), d_k\rangle}{\langle Ad_k, d_k\rangle}$$

$$x_{k+1} := x_k - r_k d_k.$$

Lemme 36 : $\forall i \neq j$, $\nabla f(x_i) \perp \nabla f(x_j)$, et $(d_k)_k$ est conjuguée à A.

Th 37 : Si $A \in S_n^{++}$, Algo 35 converge en au plus n étapes vers le minimum de f.

Références :

- Gourdon : Algèbre
- Grifone
- Rouvière
- H_2G_2
- FGN : Algèbre 3
- Ciarlet