Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

I. Point de vue algèbre bilinéaire de dim finie

Def 1 : Soit K un corps, $\sigma \in Aut(K)$ et E un Kev de dim finie. Une forme sesquilinéaire sur E est une application $\varphi : E\times E \to K$ telle que :
- $\forall y \in E$, $\varphi(\cdot, y)$ est linéaire.
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ est additive et vérifie
$$\forall \lambda \in K, \forall y \in E, \ \varphi(x, \lambda y) = \sigma(\lambda)\varphi(x,y)$$

Rem 2 : Lorsque $\sigma = id_K$, on parle de forme bilinéaire.

Def 3 : Une forme sesquilinéaire φ est dite
- symétrique si $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- hermitienne si $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \sigma(\varphi(y,x))$

Rem 4 : Pour nous, lorsque $K = \mathbb{R}$, $\sigma = id$
lorsque $K = \mathbb{C}$, $\sigma =$ la conjugaison complexe.
À partir de maintenant, on ne considère que ces cas là.

Def 5 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et φ une forme sesquilinéaire sur $E\times E$. On définit
$$m_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$$

Rem 6 : Ces matrices sont symétriques réelles (resp. hermitiennes complexes). On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) ces ensembles.

Def 7 : Si $\varphi : E \times E \to K$ est une forme sesquilinéaire hermitienne on lui associe la forme quadratique (resp. hermitienne)
$$q : E \to K, \ x \mapsto \varphi(x,x)$$

Prop 8 : Pour toute forme quadratique q sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique b tq $\forall x \in E, q(x) = b(x,x)$

Def 9 : Soit (E', φ') et (E, φ) deux Kev munis d'une forme sesquilinéaire hermitienne. Ils sont dits isométriques si il existe $u : E \to E'$ un isomorphisme de Kev tq
$$\forall x, y \in E, \quad \varphi'(u(x), u(y)) = \varphi(x,y)$$

Prop 10 : E et E' sont isométriques ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E, une base $\mathcal{B}'$ de E' et $P \in GL_n(K)$ tq
$$m_{\mathcal{B}'}(\varphi') = {}^tP\, m_{\mathcal{B}}(\varphi) P \quad (\text{resp } m_{\mathcal{B}'}(\varphi') = P^* m_{\mathcal{B}}(\varphi) P)$$

Rem 11 : Classifier les espaces quadratiques à isométrie près revient à déterminer les orbites de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sous l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ par congruence.

Th 12 (Loi d'inertie de Sylvester)
Soit (E, φ) un espace quadratique. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$m_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_t \end{pmatrix}$$

De plus, (p,q,t) est uniquement déterminé par φ.

Rem 13 : La classificat° dans le cas hermitien sur $\mathbb{C}$ est la même. ⚠ ne pas confondre avec la classificat° des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{C}$. Dans un cas, on regarde l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ par
$$(P, M) \mapsto {}^tPMP$$
Dans l'autre, on regarde l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ par :
$$(P, M) \longrightarrow P^*MP$$

Algo 14 : L'algorithme de Gauss donne une manière effective de trouver la signature d'une forme quadratique réelle, et une base dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 15. La forme $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \longmapsto x^2 - 4xz - 4zy$ a pour signature $(2,1,0)$.

II. Point de vue algèbre linéaire

Def 16. Soit un K-ev E ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un produit scalaire (resp. hermitien) sur E est une forme bilinéaire symétrique (resp sesquilinéaire hermitienne) qui est de plus définie positive : $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0$.

Not 17 : On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ les produits scalaires ou hermitiens.

Rem 18 : Le cas des produits scalaires correspond au cas de la signature $(n,0,0)$ dans le théorème de Sylvester.

Th. 19. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, alors
$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \langle \cdot, x \rangle \end{array}$$
est un isomorphisme.

Cor.-def 20 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$. On appelle u^* l'adjoint de u.

Prop 21 : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $M = m_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $m_{\mathcal{B}}(u^*) = M^*$.

Rem 22 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$. et $\|u\|_{sub} = \|u^*\|_{sub}$.

Def 23. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit :
- autoadjoint si $u^* = u$
- unitaire si $uu^* = id$
- normal si u commute avec u^*.

Rem 24 : autoadjoint $\Rightarrow$ normal
unitaire $\Rightarrow$ normal.

Lem 25. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal et si F est un sev stable par u, alors F est stable par u^* et $F^\perp$ est stable par u.

Th 26. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\boxed{\text{hermitien}}$, $u \in \mathcal{L}(E)$.
u est normal $\Leftrightarrow$ u est diagonalisable en b.o.n.

Cas particulier : Les endomorphismes auto-adjoints.
Dans ce cas, on montre que les valeurs propres sont réelles.

Th 27. (th. Spectral) Un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien ou hermitien est diagonalisable en b.o.n à valeurs propres réelles.

App. 28 : définit$^\circ$: $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXMX > 0. \\ M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

$\forall M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \exists! A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = A^2$. On note $A = \sqrt{M}$.

Th. 29 : Un corps K est dit n-réel ($n \geq 2$) si toute matrice de $\mathcal{S}_n(K)$ est semi-simple.
Si $n \geq 3$ et $\mathrm{char}(K) = 0$, on a : K est n-réel ssi -1 n'est pas la somme de $n-1$ carrés dans K — DEV 1

App30 : (diagonalisation simultanée). Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} {}^tPBP = I_n \\ {}^tPAP \text{ est diagonale.} \end{cases}$

III. Décomposition polaire et applications.

Th31 : l'applicat° $\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$ est un homéomorphisme

App 32 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$

App33 : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ où $\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$

Th34 : L'exponentielle induit un homéomorphisme : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{exp} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Rem35 : $GL_n(\mathbb{R}) \underset{\text{homéo}}{\simeq} O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Def36 : Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on note $O(p,q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries pour la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature $(p,q,0)$.

Th37 : On a $O(p,q) \underset{\text{homéo}}{\simeq} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

IV. Utilisation des matrices hermitiennes dans d'autres domaines.

Th38 : Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tPP$ (décomposition de Choleski)

App39 : Pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe un vecteur gaussien dont la matrice de covariance est A.

Rem40 : La hessienne d'une application 2 fois différentiable est une matrice symétrique réelle.

Th41 : (Lemme de Morse)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^3$, tq $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p, 0)$. Alors il existe $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre 2 voisinages de 0 tq $\forall x \in V$, $f(\varphi^{-1}(x)) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 \dots - x_n^2 + f(0)$

Def42 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $M - N = A$ une décomposition régulière (ie $M \in GL_n(\mathbb{C})$). La méthode itérative associée à la décomposition est : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{C}^n \\ Mx_{k+1} = Nx_k + b \end{cases}$ (pour la résolut° de $Ax = b$)

Rem43 : La méthode converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

Th44 : Soit $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$. Soit $A = M - N$ une décomposit° régulière. Si $M^* + N \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$

Cor45 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. $A = D - L - U$ où $A = \begin{pmatrix} D & & -U \\ & D & \\ -L & & D \end{pmatrix}$. La méthode de Gauss-Seidel consiste à prendre $\begin{cases} M = D - L \\ N = U \end{cases}$

Elle converge si $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ DEV2

Rem46 : (culturelle) Soit $S_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ suite de matrices symétriques aléatoires. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S_n.
Alors : ps, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i} \underset{\text{loi}}{\Longrightarrow}$ la loi du demi-cercle.

C'est le théorème d'universalité de Wigner.

Ce qu'on aurait pu rajouter :

- Un algorithme qui calcule la décomposition polaire d'une matrice inversible donnée : voir [NH2G2] p. 353.

- Des choses sur la classification des coniques. (voir Ramis-Deschamps-Odoux 2)

Références :

- Perrin Chap5 pour un point de vue très général sur les formes sesquilinéaires sur un corps qcq
- NH2G2 tome 1 pour tout ce qui est décomposition polaire et applications.
- Rouvière (Petit guide ...) pour le lemme de Morse.
- Allaire, Algèbre linéaire numérique pour le DEV2.
- RMS (126-2 je crois) pour le DEV 1
- Rémi Goblot, Algèbre linéaire pour la partie th. de Sylvester.
- Graux X ENS Algèbre 3 pour la décomposit° de Choleski