158

Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

0) Cadre et introduction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 1 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique (resp antisymétrique) si $A = {}^tA$ (resp $A = -{}^tA$). On note S_n (resp A_n) cet ensemble.

Proposition 2 : - S_n est un sev. de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

- A_n est un sev. de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

On a de plus $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$.

Définition 3 : $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$ est dite hermitienne si $A = {}^t\bar{A}$.

Attention 4 : L'ensemble H_n des matrices hermitiennes est un $\mathbb{R}$ ev de dim. n^2. Ce n'est pas un $\mathbb{C}$ ev ! $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists! (S,A) \in S_n \times A_n$, $M = S + iA$

Notation 5 : Pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ on note $M^* := {}^t\bar{M}$ ($= {}^tM$ si $k = \mathbb{R}$).

Définition 6 : Soit $A \in S_n$ (ou resp H_n). On dit que A est positive (resp négative) si $\forall x \in k^n$, $x^*Ax \in \mathbb{R}_+$ (Resp $x^*Ax \in \mathbb{R}_-$)

Remarque 7 : Pour $A \in H_n(\mathbb{C})$, $x^*Ax \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$

Notation 8 : On note S_n^+ (resp H_n^+) les matrices positives de S_n (resp H_n)

I) formes quadratiques réelles et hermitiennes.

A) formes bilinéaires symétriques et sesquilinéaires à symétrie hermitienne.

Ici, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un k ev de dimension finie, et on abrège forme bilin. symm (resp. forme sesq. lin. à sym. herm.) en FBS. (resp SASH).

Définition 9 : On appelle forme bilinéaire symétrique (resp SASH) toute application $E \times E \to k$ linéaire en la première variable et linéaire (resp anti. linéaire) en la seconde variable.

Définition 10 : Pour φ FBS (resp SASH) et $B = (e_1 - e_n)$ une base de E on appelle matrice de φ dans la base B la matrice $mat_B(\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$

Remarque 11 : L'application qui à φ associe sa matrice est un isomorphisme de {FBS} (resp {SASH}) vers S_n (resp H_n) (k-lin)

Exemple 12 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Proposition 13 Soient B et B' deux bases de E, $P = Pass(B, B')$, φ FBS (resp SASH) $M = mat_B\varphi$, $M' = mat_{B'}\varphi$, alors $M' = P^*MP$.

Remarque 14 : Ce changement de base définit une action $GL_n(k)$ sur S_n (resp H_n) appelée action de congruence.

Définition 15 : Soit φ FBS (resp SASH) on dit que x et $y \in E$ sont φ-orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$. Pour $A \subset E$, on note $A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$ l'orthogonal de A.

Remarque 16 : C'est un sev de E, et $A^\perp = (\text{vect } A)^\perp$.

Théorème 17 : Soit φ FBS (resp SASH). Il existe une base de E faite de vecteurs 2 à 2 φ-orthogonaux.

Corollaire 18 :

B) formes quadratiques réelles et hermitiennes.

Définition 19 : On appelle forme quadratique réelle (resp hermitienne) toute application $x \in E \mapsto \varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ où φ est une FBS (resp SASH) [auquel on associe la matrice de φ (dans une base fixée)]

Exemple 20 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum x_i^2 = {}^tx I_n x$ est une forme quadratique de matrice I_n.

Théorème 21 (Inertie de Sylvester) Dans l'action de congruence sur S_n (resp H_n), toute orbite contient ~~unique~~ une et une unique matrice de la forme :

$$I_{(p,q)} \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } p + q \leq n.$$

Ex : signature $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1)$

Définition 22. On appelle signature de $M \in S_n$ (resp H_n) le couple (p,q) donné par le théorème.

On dira que M est non dégénérée si $p + q = n$. (i.e. est de rang max)

Lemme 23 (de Schwarz) Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $\mathcal{U}$ ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f$.

Proposition 24 : Soit $x \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert), un point critique non dégénéré de $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ notons (p,q) la signature de $Hess(f)(x) \in S_n$. Alors :

- x est un maximum local strict $\iff q = n$ (donc $p = 0$)
- x est un minimum local strict $\iff p = n$ (donc $q = 0$)

où x est un point critique non dégénéré de f si

- x est un point critique de f (ie $df_x = 0$)
- $Hess(f)(x) \in GL_n(\mathbb{R})$. (et symétrique)

(Nous en donnons en annexe)

1

$U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert — Proposition

Lemme 25 (de Morse) Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point critique non dégénéré de f.
Alors il existe φ un difféomorphisme local de $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x)$ vers $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ tel que :

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(x_0) - \sum_{k=1}^{i} x_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n} x_k^2 \quad \text{pour tout } x \in W.$$

$i \in [\![0,n]\!]$

Où i ~~ne~~ dépend que de f et x_0. On a la signature de $\mathrm{Hess}(f)(x_0)$ qui est $(n-i, i)$.

C) Autoadjonction

Définition 26 : Soit φ une FBS (resp SASH) non dégénérée et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit autoadjoint ssi $\forall x, y \in E$, $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u(x))$.

Proposition 27 : Soit φ FBS (resp SASH) non dégénérée, et $u \in \mathcal{L}(E)$. $\exists!\, u^{*\varphi} \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^{*\varphi}(y))$.

Exemple 28 : Sur $\mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire canonique, à base fixé, S_n (resp H_n) est l'ensemble des matrices autoadjointes de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{O}_n(\mathbb{C})$)

orthonormé bon

Proposition 29 : Soit $A \in S_n$ (resp H_n) non dégénérée. Si $B \in \mathcal{M}_n(k)$, alors $B^{*A} = A^{-1}\,{}^t\!B\, A$. (où on a identifié endomorphisme et matrice dans la base canonique)

Remarque 30 : Sur k^n muni du produit scalaire usuel, on retrouve $B^{*I} = B^*$.

II) Étude topologique de l'espace des matrices et réduction.

A) Orbites de l'action de congruence.

Proposition 31

$$S_n = \bigsqcup_{p+q \le n} \{{}^tP I_{(p,q)} P \mid P \in GL_n(\mathbb{R})\} = \bigsqcup_{p+q\le n} \mathrm{orb}_{\mathbb{R}}(I_{(p,q)})$$

$$H_n = \bigsqcup_{p+q \le n} \{P^* I_{(p,q)} P \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\} = \bigsqcup_{p+q\le n} \mathrm{orb}_{\mathbb{C}}(I_{(p,q)})$$

Définition 32 : $S_n^{++} := \mathrm{orb}_{\mathbb{R}}(I_n) = \{{}^tPP \mid P \in GL_n(\mathbb{R})\}$ $\left(S_n^+ = \bigsqcup_{p\le n} \mathrm{orb}_{\mathbb{R}}(I_p)\right)$

$H_n^{++} := \mathrm{orb}_{\mathbb{C}}(I_n) = \{P^*P \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ $\left(H_n^+ = \bigsqcup_{p\le n} \mathrm{orb}_{\mathbb{C}}(I_p)\right)$

Lemme 33, $\left\{\begin{matrix} S_n^{++} \\ H_n^{++}\end{matrix}\right.$ est un ouvert de $\begin{matrix} S_n \\ H_n.\end{matrix}$

Proposition 34

$$\overline{\mathrm{Orb}(I_{(p,q)})} = \bigsqcup_{\substack{p' \le p \\ q' \le q}} \mathrm{Orb}(I_{p',q'})$$

Proposition 35 Les composantes connexes par arcs de $S_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ (resp $H_n \cap GL_n(\mathbb{C})$) sont les $\mathrm{orb}(I_{p,q})$ avec $p+q=n$.

B) Stabilisateurs de l'action.

Définition 36. Pour $A \in S_n$ (resp H_n), on appelle groupe d'isotropie de la forme quadratique associée à A le stabilisateur $\{P \in GL_n(k),\ PAP^* = A\}$.

Exemple 37. On retrouve $O_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Stab}_{\mathbb{R}} I_n$ et $U_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Stab}_{\mathbb{C}} I_n$.

Exemple 38 : Les rotations de $\mathbb{R}^2$, $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$ sont orthogonales.

Remarque 39. Nous détaillerons les autres stabilisateurs + loin.

Exemple 40 : $\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ -\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

C) Réduction.

Lemme 41 : Deux matrices sont O_n (resp U_n) congruentes ssi elles sont O_n (resp U_n)-semblables.

Remarque 42.

Théorème 43 (Spectral) On munit k^n de sa structure euclidienne (hermitienne) canonique. Alors toute matrice de S_n (resp H_n) est diagonalisable ~~sous l'action de O_n (resp U_n)~~ en base orthonormée.

Remarque 44 : C'est le point de vue autoadjoint, dira-t-on.

Théorème 45 (orthogonalisation simultanée)
Soient $A\in S_n^{++}$ et $A'\in S_n$. Il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A={}^tPP$ et $A'={}^tPDP$ avec D diagonale.

Remarque 46: C'est le point de vue bilinéaire, dira-t-on.

Théorème 47: (minimax) Soit $S\in S_n$. On note $\lambda_1\geq\dots\geq\lambda_n$ les valeurs propres de S.
Alors $\lambda_k = \max_{\dim F=k}\ \min_{x\in F,\ \|x\|=1} {}^txSx = \min_{\dim F=n-k+1}\ \max_{x\in F,\ \|x\|=1} {}^txSx$.

III) Applications en géométrie.

A) Classification affine des coniques réelles.

Définition 48: On appelle conique l'ensemble des zéros d'un polynôme de $\mathbb{R}[X,Y]$ de degré (homogène) plus petit que 2.

Exemple 49: – Le cercle de $\mathbb{R}^2$: x^2+y^2-1.
– Si $\alpha\in\mathbb{R}^*$, f et αf définissent la même conique (quand cela a un sens)

Notation 50: Pour $f\in\mathbb{R}_{\leq 2}[X,Y]$ on note $\Gamma_f = Z(f)\subset\mathbb{R}^2$.

Proposition 51: Soit X l'ensemble des coniques de $\mathbb{R}^2$. Le groupe affine $GA_2(\mathbb{R})$ agit à gauche sur X via:
$g\cdot\Gamma_f = g(\Gamma_f)=\Gamma_{f\circ g^{-1}}$ pour $g\in GA_2$, $\Gamma_f\in X$.

Théorème 52: (classification affine des coniques réelles)
Soit Γ une conique non vide ou réduite à un point
Alors il existe une et une seule conique de la forme:
$f = x^2+y^2=1$ ou $x^2-y^2=1$ ou $x^2-y^2=0$ ou $x^2+y=0$ ou $x^2=1$ ou $x^2=0$
tq Γ_f soit dans l'orbite de Γ.

B) Décomposition polaire et applications.

Théorème 53: La multiplication matricielle induit les homéomorphismes:
$O_n\times S_n^{++}\xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S)\mapsto OS$; $U_n\times H_n^{++}\xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C})$, $(U,H)\mapsto UH$

(Lemme: (racine carrée) $\forall S\in S_n^+$, $\exists!\sqrt{S}\in S_n^+$ telle que ${}^t(\sqrt{S})(\sqrt{S})=S$.)

Application 54: Pour $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2^2=\rho({}^tAA)$

Application 55: L'exponentielle matricielle induit les homéomorphismes
$\exp: \begin{cases} S_n \to S_n^{++} \\ H_n \to H_n^{++}\end{cases}$
On en déduit les homéomorphismes: $GL_n(\mathbb{R})\simeq O_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $GL_n(\mathbb{C})\simeq U_n(\mathbb{C})\times\mathbb{R}^{n^2}$

Application 56: On a les homéomorphismes:
$O(p,q)=\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}I_{pq}\simeq O_p\times O_q\times\mathbb{R}^{pq}$ et $U(p,q)=\mathrm{Stab}_{\mathbb{C}}I_{pq}\simeq U_p\times U_q\times\mathbb{R}^{pq}$

C) Distance dans un espace préhilbertien.

Cadre: E esp. ph. sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 57: Si $x_1\dots x_n\in E$, on appelle matrice de Gramm de $x_1\dots x_n$ la matrice $(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j}$. On note $G(x_1\dots x_n)$ son déterminant.

Exemple 58: Une matrice de covariance d'une famille de va centrées est une matrice de Gramm. Le produit d'Hadamard de matrices positives est positif.

Proposition 59: Toute matrice de Gramm est un élément de S_n (resp H_n) et réciproquement. De plus, $x_1\dots x_n$ est libre ssi $G(x_1\dots x_n)\neq 0$.

Application 60: Pour $p\in\mathbb{N}$ fixé, $\{(x_1\dots x_p) \mid (x_1\dots x_p) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^p.

Théorème 61: Soit $(e_1\dots e_n)$ une famille libre de E, $V=\langle e_1\dots e_n\rangle$.
Alors $d(x,V)^2=\dfrac{G(e_1\dots e_n,x)}{G(e_1\dots e_n)}$ pour $x\in E$.

Théorème 62: (Müntz)
Soit α_n st croissante, ≥ 0, $\alpha_n\to\infty$. Alors
$\mathbb{R}[X]\subset\overline{\langle x^{\alpha_n}\rangle}^{\|\cdot\|_2}$ ssi $\sum_{n\geq1}\frac{1}{\alpha_n}$ diverge.
Si de plus, $\alpha_0=0$, alors $\langle x^{\alpha_n}\rangle$ est dense dans $(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$

DEV 2

Références:
- Caldero Germoni – NH2G2 1
- Gourdon – Algèbre / Analyse
- De Seguin Pazzis – Invitation aux formes quadratiques.
- Rouvière – Petit guide de calcul diff.
- – – –