158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

I - Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Déf 1 : • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est dite symétrique si ${}^tM = M$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M est dite hermitienne si ${}^*M = M$, avec ${}^*M := {}^t\overline{M}$. On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices hermitiennes.

Ex 2 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_n$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$.

Thm 3 : • $S_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dim. $\frac{n(n+1)}{2}$.

• $\mathcal{H}_n$ est un $\mathbb{R}$-sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dim. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Rque 4 : $\mathcal{H}_n$ n'est pas un $\mathbb{C}$-sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$\begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_n$ mais $i \times \begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{H}_n$.

Prop 5 : En notant $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices asymétriques (ie tq ${}^tM = -M$), on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Prop 6 : $\forall M \in \mathcal{H}_n$, M s'écrit de manière unique de la forme $M = S + iA$, avec $S \in S_n(\mathbb{R})$, $A \in A_n(\mathbb{R})$.

2) Lien avec les formes bilinéaires et quadratiques

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim. n, soit F un $\mathbb{C}$-ev de dim. n.

Déf 7 : On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme $q : x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est bilinéaire sur E. De plus, il existe une unique forme bilinéaire symétrique telle que $q : x \mapsto \varphi(x,x)$, appelée forme polaire de q.

Déf 8 : On appelle forme hermitienne sur F toute application $h : F \to \mathbb{C}$ de la forme $h : x \mapsto \Phi(x,x)$ ~~est~~, où Φ est sesquilinéaire (ie : linéaire pour une variable, semi-linéaire pour l'autre) et hermitienne (ie : la matrice de Φ dans toute base de F est hermitienne).

Ex 9 : $E = \mathbb{R}^3$. $q : (x,y,z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$.

$E = \mathbb{C}^2$. $h : (x,y) \mapsto \bar{x}x - 2y\bar{y} + \frac{3}{2}\bar{y}x + \frac{3}{2}y\bar{x}$.

Déf 10 : Soient q une forme quadratique sur E (resp. hermitienne sur F) et B une base de E (resp. de F). On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire de q dans la base B, et le rang de q celui de cette matrice.

Ex 11 : • $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 3.

• $h(x,y) = \bar{x}x - 2\bar{y}y + \frac{3}{2}\bar{y}x + \frac{3}{2}\bar{x}y$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

II - Réduction

1) Théorèmes spectraux

Déf 12 : Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit autoadjoint si $\forall x,y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$, ie : si ${}^*f = f$.

Prop 13 : f est autoadjoint sur un espace euclidien ssi sa matrice dans une base orthonormée est symétrique réelle.

Thm 14 (spectral) : (Endom.) Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors f est diagonalisable, et ses sous espaces propres sont 2-à-2 orthogonaux.

(Matrices) Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPAP$ soit diagonale.

Rque 15 : Faux dans $S_n(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique non diagonalisable.

Déf 16 : f est autoadjoint sur un espace hermitien ssi sa matrice dans une base orthonormée est hermitienne.

Thm 17 (spectral) : (Endom) : Si f est autoadjoint d'un espace hermitien, alors les valeurs propres de f sont toutes réelles, f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont 2-à-2 orthogonaux.
(Matrices) $A \in \mathcal{H}_n \Longrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_n$, ${}^*UAU$ est diagonale réelle.
(avec $\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), {}^*UU = I_n\}$).

2) Classification des formes quadratiques, hermitiennes

Thm 18 : Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base (e_i) de E tq, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$, où $r = rg(q)$.

Thm 19 (Sylvester) : Soit E un $\mathbb{R}$-ev (resp. $\mathbb{C}$-ev) et q une forme quadratique (resp. hermitienne), alors il existe une base (e_i) de E tq, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$
(resp. $q(x) = |x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_r|^2$).
c-à-d : $Mat_{(e_i)}(q) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, où $r = rg(q)$ et p un entier.
Le couple $(p, r-p) =: sg(q)$ est la signature de q.

Méth. 20 : La méthode de Gauss permet de déterminer la signa. d'une telle forme.

Ex 21 : $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz$
$= (x - 2y + 3z)^2 - 2(y+2z)^2 + 14z^2$. $sg(q) = (2,1)$.

3) Matrices et formes définies positives

Déf 22 : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie positive (dp) si $\forall X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.
$S_n^{++}(\mathbb{R}) := \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXMX > 0\}$.
$S_n^{+}(\mathbb{R}) := \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXMX \geq 0\}$.
$\mathcal{H}_n^{++} := \{M \in \mathcal{H}_n \mid \forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, {}^tXMX > 0\}$.
$\mathcal{H}_n^{+} := \{M \in \mathcal{H}_n \mid \forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, {}^tXMX \geq 0\}$.

Prop 23 : Soient une forme bilinéaire φ sur E un $\mathbb{R}$-ev, (e_i) une base de E, et $M = Mat_{(e_i)}(\varphi)$. Alors φ définit un produit scalaire (ie : M est dp) ssi toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Prop 24 : Si E est un $\mathbb{R}$-ev (resp. un $\mathbb{C}$-ev) et q une forme quadratique (resp. hermitienne), alors q est dp ssi $sg(q) = (n, 0)$.

Prop 25 : Soient $M, N \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}_n$), tq M soit dp. Alors $\exists C \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) tq :
${}^*CMC = I_n$ et ${}^*CNC$ est diagonale réelle.

Thm 26 (Critère de Sylvester) : Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, soit $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $M_k := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
Alors M est dp ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\det(M_k) > 0$.

III - Applications

1) Homéomorphismes

Thm 27 (Décomposition polaire) : Les applications
$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$(O, S) \longmapsto OS$$
et
$$\mathcal{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$
$$(U, H) \longmapsto UH$$
sont des homéomorphismes.

DEV (1)

Rque 28 : Dans le cas complexe, pour $n=1$, $\mathcal{H}_1^{++} = \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{U}_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, et $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Cela revient donc à écrire $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme polaire : $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Coro 29 : $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)}$, où ρ est le rayon spectral.

Thm 30 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n^{++}$ sont des homéomorphismes.

2) Calcul différentiel

Thm 31 (Schwarz) : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$.
Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Déf 32 : On définit la matrice hessienne de f en a :
$$Hf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Rque 33 : D'après le thm de Schwarz, Hf_a est symétrique.

Thm 34 : Soient $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en a. Alors a est un minimum (resp. maximum) local de f sur U ssi Hf_a est définie positive (resp. définie négative).

App 35 : Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} \end{array}$. Points critiques : $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$.
$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$: $(0,0)$ n'est pas un extremum.
$Hf_{(0,\sqrt{2})} = Hf_{(0,-\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$ sont des minima locaux de f.

Thm 36 (Morse) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto \varphi(x) =: u$ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, tq :
$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$
(où $u = (u_1, \dots, u_n)$).

DEV 2

Coro 37 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, tq $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non dégénérée.
Alors l'ensemble des points critiques non dégénérés de f est un ensemble discret.