132 : Formes linéaires et hyperplan en dimension finie
Exemples et applications

I. Formes linéaires et Hyperplan

1) Définition et 1ère propriétés

Def : Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, que l'on appelle dual de E.

Ex : . Dans $L^1(0,1)$, $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, df_a est une f. l. sur $\mathbb{R}^n$.

Notation : Pour $x \in E$, $\varphi \in E^*$, on note $\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x)$

Def : Un hyperplan d'un ev de dim n est un sev de dim n-1

Prop : i) Soit $\varphi \in E^*$ non nulle, alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan
ii) Soit H un hyperplan, alors il existe $\varphi \in E^*$ tq $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.
De plus si $\psi \in E^*$ tq $\mathrm{Ker}(\psi) = H$, alors : $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\psi = \lambda \varphi$

Cor : Equation d'un hyperplan
i) Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, alors l'ensemble des $x \in E$ vérifiant : $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ (*) est un hyperplan de E.
ii) Tout hyperplan de E admet une équation de la forme (*) unique à cte multiplicative près.

2) Application à la géométrie euclidienne

Th de Cartan-Dieudonné :

. Les réflexions engendrent O(E) : Si dim E ≥ 2, toute application de O(E) s'écrit comme un produit de moins de n réflexions.

. Si dim E ≥ 3, les retournements engendrent SO(E) : Toute application de SO(E) s'écrit comme le produit de moins de n retournement.

Preuves Développement.

II. Dualité

Def : Base Duale
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, alors on définit $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des f.l tq : $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$
La famille $\mathcal{B}^*$ forme une base de E^*, appelée base dual de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ est la base antéduale de $\mathcal{B}^*$.

Prop : Le choix d'une base $\mathcal{B}$ de E permet de définir un isomorphisme entre E et E^* :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i^*$$

Rq : Dans le cas euclidien, on retrouve cet isomorphisme avec le Th de représentation de Riesz.

Déf: Bidual

On appelle bidual de E le dual de E^*, noté E^{**}

Rq: Soit $x \in E$, alors $\varphi \mapsto \varphi(x) \in E^{**}$

> **Th:** L'application $J : E \longrightarrow E^{**}$, $x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$ est un isomorphisme.

Rq: • J ne dépend pas du choix d'une base.
• En dim infinie, J est toujours injectif.

III – Orthogonalité

Déf: Un vecteur $x \in E$ et une f.l $\varphi \in E^*$ sont orthogonaux si : $\langle \varphi, x \rangle = 0$

Déf: Soit $F \subset E$, on appelle orthogonal de F l'ensemble

$$F^{\perp} = \{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in F,\ \varphi(x) = 0 \}$$

Rq: $F^{\perp} \subset E^*$

> **Prop:** • $A_1 \subset A_2 \subset E \Rightarrow A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp} \subset E^*$
> • $F^{\perp} = (\mathrm{Vect}(F))^{\perp}$ et $F^{\perp}$ est un sev de E^*
> • Si F est un sev de E, $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$
> de plus : $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Rq: Cette dernière égalité se fait via l'isomorphisme J.

> **Cor:** • Soit $(\varphi_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de E^* de rang r, alors $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est un sev de dim $(n-r)$
> • Réciproquement, si F est un sev de E de dim q, alors il existe $n-q$ hyperplans $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ tq:
> – $(\varphi_i)_{1 \le i \le n-q}$ est libre
> – $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$

Interprétation : F peut être vu comme l'ensemble des solut° d'un système de $n-q$ équations à n inconnues, ou comme l'intersection de $n-q$ hyperplans.

Application: Interpolation de Lagrange

$E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts.

On définit $(\varphi_i)_{0 \le i \le n} \in E^*$ par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\langle \varphi_i, P \rangle = P(a_i)$

$(\varphi_i)_{0 \le i \le n}$ est une base de E^* dont la base antéduale est formée des polynômes de Lagrange : $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

On a donc pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, L_i(X).$$

IV - Transposée d'une application.

Def: Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par :

$$\forall \varphi \in F^*, \quad {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Prop: $\forall x \in E, \forall \varphi \in E^* : \langle \varphi, f(x) \rangle = \langle {}^t f(\varphi), x \rangle$

Prop: ~~Soit~~ B une base de E, B^* sa base duale, C une base de F et C^* sa base duale, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{C^*, B^*}({}^t f) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{B,C}(f)\right)$$

Cor: • L'application $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$, $f \longmapsto {}^t f$ est linéaire.

• ${}^t({}^t f) = f$

• Si $v \in \mathcal{L}(F,G)$, ${}^t(v \circ f) = {}^t f \circ {}^t v$

Prop: $\mathrm{Im}({}^t u) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$ et $\mathrm{Ker}({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$

Prop: ~~si~~ F est un sev stable par u ssi $F^\perp$ est stable par u^t

Cor: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est si F est un sev de E u-cyclique i.e. $\exists x \in F$, $F = \{ P(u)(x) ; P \in \mathbb{K}_n[X] \}$

Alors F possède un supplémentaire stable par u.

Applications: Existence des invariants de similitudes d'un endomorphisme.

Références :

• Jacques Gélbart : Algèbre linéaire ; des bases aux applications (Bien fait).

• Henri Roudier : Algèbre linéaire.

(Explique bien, pas mal d'exos pouvant servir de dvpt)

• Rémi Goblot : Algèbre linéaire

(De bon exemples de forme linéaires ... mais c'est tout. -)

• MER : Le livre orange et ~~jaune~~ blanc pour mon développement.

Klein - Milman