159 : Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Soient $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On note $\mathcal{L}(E)=\{\text{applications linéaires } E\to E\}$

I) Généralités

1) Formes linéaires [GOU]

Déf 1 : Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{K}$.

Déf Prop 2 : L'ensemble des formes linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-ev et est appelé *espace dual* de E. On le note E^*.

Ex 3 : · dans $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1$ est une forme linéaire.
· La différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire.

[DVLPT 1] : Pour toute forme linéaire f de $M_n(\mathbb{K})$, il existe $A\in M_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall M\in M_n(\mathbb{K}) : f(M)=tr(AM).$$

Prop 4 : Toute forme linéaire non nulle est surjective.

2) Hyperplans [GOU]

Déf 5 : Un *hyperplan* H de E est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim H = n-1$.

Ex 6 : · $\mathbb{R}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$

Prop 7 : Soit $\varphi\in E^*$ non nulle. Alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de E. Réciproquement tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Appli 8 : Si f et $g\in\mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et commutent alors il existe une base de trigonalisation commune à f et g.

Appli 9 : Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ coupe $GL_n(\mathbb{K})$.

Appli 10 : Théorème d'inertie de Sylvester :
Toute forme quadratique q de rang r sur $\mathbb{R}^n$ peut se mettre sous la forme $q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$ où les x_i sont les coordonnées de x dans une certaine base. [L-F]

3) Hahn-Banach [TAU]

Soit $(\mathcal{E},E)$ un espace affine euclidien de dimension finie.

Déf 11 : Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{H}$ est un *hyperplan affine* de $\mathcal{E}$ lorsque $\dim\mathcal{H}=\dim H$ où H est la direction de $\mathcal{H}$.

Thm 12 : Soient $\mathcal{A}$ un ouvert convexe non vide de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}=\emptyset$. Alors il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}\cap\mathcal{H}=\emptyset$.

Contre-ex 13 : Si $\mathcal{A}$ n'est pas ouvert alors le résultat ne subsiste pas en général, par exemple : $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)\cup([0,1]\times\{0\})$ et $\mathcal{L}=\{(2,0)\}$.

II) Dualité

1) Bases duales et antéduales

Déf 14 : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la forme linéaire e_i^* définie par $\forall j\in[\![1,n]\!] : e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$ s'appelle la *forme linéaire coordonnée d'indice i*. [GOU]

Ex 15 : Sur $\mathbb{R}_n[X]$, pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ on a :
$\forall k \in [\![0,n]\!] : (X^k)^*(P) = a_k$.

[GOU] Thm 16 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$. On en déduit :
$\dim E = \dim E^*$ et $\forall \varphi \in E^* : \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.

Ex 17 : sur $\mathbb{R}^2$, avec (e_1, e_2) la base canonique :
$(e_1^*, e_2^*) = (x \mapsto x_1, x \mapsto x_2)$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

[GRi] Appli 18 : indépendance de formes linéaires

Prop 19 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $\forall i : e_i^* = f_i$.
Cette base s'appelle base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$.

2) Bidual

Déf 20 : On note E^{**} et on appelle bidual de E l'ensemble des formes linéaires sur E^*.

[GOU] Thm 21 : E et E^{**} sont canoniquement isomorphes (ie : il existe un isomorphisme de E sur E^{**} indépendant des bases)

III] Application transposée et orthogonalité

1) Orthogonalité

Déf 22 : $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux lorsque $\varphi(x) = 0$

Ex 23 : Sur $\mathbb{R}^2$, $(1,0)$ et e_2^* sont orthogonaux.

Déf 24 : · Pour $A \subset E$, on note $A^\perp := \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A : \varphi(x) = 0\}$
$A^\perp$ est un sev de E^* appelé orthogonal de A.
· Pour $B \subset E^*$, on note $B^\circ := \{x \in E \mid \forall \varphi \in B : \varphi(x) = 0\}$
B° est un sous-espace vectoriel de E appelé orthogonal de B.

[GOU] Thm 25 : · Pour F un sous-espace vectoriel de E, on a :
$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$.
· Pour G un sous-espace vectoriel de E^*, on a :
$\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$.

Prop 26 : · Pour A_1 et A_2 deux sous-espaces vectoriels de E on a : $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ et $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$.
· Pour B_1 et B_2 deux sous-espaces vectoriels de E^* on a : $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$ et $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

Prop 27 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :
$(F = E) \iff (F^\perp = \{0\})$.

Prop 28 : Équations d'un ss-ev en dimension finie.
· Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ telles que $rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$.
Alors le sev $\{x \in E \mid \forall i : \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n-r$.
· Réciproquement, si F est un sev de E de dimension q, alors il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que : $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \operatorname{Ker} \varphi_i$.

2) Application transposée [GOU]

Déf 29 : Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
L'application linéaire $\begin{cases} F^* \to E^* \\ f \mapsto f \circ u \end{cases}$ est appelée application transposée de u et notée ${}^t u$.

Prop 30 : On a : $\cdot$ $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}({}^t u)$
$\cdot$ $\mathrm{Im}({}^t u) = (\ker u)^\perp$
$\cdot$ $\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

Prop 31 : Pour F, G deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a :
$${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v.$$

Prop 32 : Soit F un sev de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a : (F est stable par u) $\Leftrightarrow$ ($F^\perp$ est stable par ${}^t u$).

Appli 33 : raisonnements par récurrence relatifs aux réductions d'endomorphisme.

IV) Générateurs de groupes de matrices [PER].

1) Générateurs de $GL(E)$ [DVLPT 2].

Déf 34 : Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de E dans E.

Déf-Prop 35 : Soient H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_{|H}$. Alors il y a équivalence entre :
1) $\det u \neq 1$.
2) u admet une valeur propre différente de 1 et u est diagonalisable
3) $\mathrm{Im}(u - id) \not\subset H$

Si u vérifie une de ces propriétés alors on dit que u est une dilatation.

Déf-Prop 36 : Soient H un hyperplan de E d'équation $f \in E^*$ ($H = \ker f$) et $u \in GL(E)$ tel que $u \neq id$ et $u_{|H} = id_{|H}$. Alors il y a équivalence entre :
1) $\det u = 1$
2) u n'est pas diagonalisable
3) $\mathrm{Im}(u - id) \subset H$
4) $\exists a \in H \setminus \{0\}$ tel que : $\forall x \in E : u(x) = x + f(x)a$.
5) dans une certaine base, u a pour matrice : $\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

Si u vérifie une de ces propriétés alors on dit que u est une transvection.

Thm 37 : $GL(E)$ est engendré par les transvections et dilatations

2) Générateurs de $SL(E)$

Déf 38 : Le groupe spécial linéaire est $SL(E) := \{u \in GL(E) \mid \det u = 1\}$

Thm 39 : $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Références :

[GOU] : *Algèbre*, Gourdon (pour presque tout)

[L-F] : *Cours de mathématiques*, Lelong-Ferrand, Arnaudiès. (juste pr le thm d'inertie de Sylvester)

[TAU] : *Géométrie*, Tauvel (juste pour I] 3) H-B)

[GRi] : *Algèbre linéaire*, Grifone (juste pour Appli 18 : indpdce formes lin)

[PER] : *Cours d'algèbre*, Perrin (pour IV] Générateurs)

autres pistes pour le plan : générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$.

autres dvlpts possibles : Hahn-Banach géométrique [TAU]
thm des extrema liés [GOU] (Analyse).
générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$ [AUD] et [PER]