159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples & applications

On notera E un k-ev de dimension finie n.

I FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

1) Formes linéaires

[GRI]

<u>déf</u>: On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $f: E \to k$. On appelle dual leur ensemble $E^* = \mathcal{L}_k(E, k)$.

<u>Écriture</u>: Soient $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $f \in E^*$, alors : $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, où $a_i := f(e_i)$

matriciellement : $\mathrm{mat}_{(e_i)}(f) = (a_1 \ldots a_n)$.

<u>ex</u>: 1) Si $(E, \langle,\rangle)$ est préhilbertien, $\forall y \in E$, $x \mapsto \langle x, y\rangle \in E^*$, réciproquement, $\forall f \in E^*$, $\exists a \in E / \forall x \in E$, $f(x) = \langle a, x\rangle$.

2) $E = \mathbb{R}^n$, soit $f: E \to \mathbb{R}$ différentiable en $\alpha \in E$, alors $d_\alpha f \in E^*$, sa matrice dans une base est appelée Jacobienne : $\mathrm{Jac}_\alpha(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha)\right)$ et $d_\alpha f(x) = \langle \mathrm{grad}_\alpha f, x\rangle$ $\forall x \in E$.

3) La trace $\tau : \begin{cases} \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow k \\ (a_{ij}) \longmapsto \sum a_{ii} \end{cases}$ est une forme linéaire.

2) Hyperplans

[GOU] [GRI] [P]

<u>prop</u>: • Si $f \in E^*$ alors $\ker f$ est un hyperplan de E, réciproquement

• si H est un hyperplan de E, alors $\exists f \in E^* / H = \ker f$

<u>ex</u>: 1) Soit F un sev de E, alors $\exists (H_i)_{i=1}^p$ hyperplans de $E / F = \bigcap_{i=1}^p H_i$

On obtient alors un système d'équations de F de la forme $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$

2) Soit t une transvection (ie $t \in GL(E)$ admet un hyperplan H de points fixes) alors $\exists f \in E^*$, $H := \ker f$, $\exists \omega \in H - \{0\}$ tels que $\forall x \in E$, $t(x) = x + f(x).\omega$

rq: les transvections engendrent $SL(E)$ et en permettent l'étude.

II DUALITÉ

1) Dual et applications

[GOU] [GRI]

<u>déf</u>: Soit $B = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on appelle forme linéaire coordonnée d'indice i la forme e_i^* définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

<u>thm</u>: Soit $B = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E. Alors $B^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ est une base de E^*, appelée base duale de B.

<u>ex</u>: la base duale de $e_1 = (1\,1\,1)$; $e_2 = (1\,0\,-1)$; $e_3 = (0\,1\,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est $\theta_1 = (1\,-1\,1)$; $\theta_2 = (0\,1\,-1)$; $\theta_3 = (-1\,2\,-1)$.

Du thm, on déduit que $\dim E^* = \dim E$ et donc $E \simeq E^*$ via le choix d'une base.

<u>Exemples & Applications</u>:

1) $f: \begin{cases} \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow \mathcal{M}_n(k)^* \\ A \longmapsto f_A \end{cases}$ où $f_A \begin{cases} \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow k \\ X \mapsto \mathrm{Tr}(AX) \end{cases}$ est un isomorphisme. [FGN1]

↳ <u>App°</u>: • Si $f \in \mathcal{M}_n(k)^*$ et $f(XY) = f(YX)$ $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(k)$, alors $\exists \lambda \in k$ tel que $f = \lambda.\mathrm{Tr}$.

↳ • tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(k)$ rencontre $GL_n(k)$.

2) A l'aide du théorème des fonctions implicites, on démontre le <u>théorème des extrema liés</u>: [GOU2]

<u>thm</u>: Soient $f, g_1 \ldots g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1, U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Gamma = \{x \in U / g_1(x) = \ldots = g_r(x) = 0\}$, si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si $dg_{1,a}, \ldots dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors $d_a f \in \mathrm{Vect}\langle dg_{1,a} \ldots dg_{r,a}\rangle$. ie $\exists! (\lambda_1, \ldots \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ / $d_a f = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_{i,a}$ [DVT]

↳ <u>App°</u>: $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

[GRI] 3) • Toute forme quadratique $q : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$ peut être "réduite en carrés" par la méthode de Gauss, on a alors $q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \ell_i(x)^2$ où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes.

↳ On peut alors diagonaliser q dans une BOG :

[GAN] ex: $E = \mathbb{R}^3$; $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ devient $q(x) = (x_1+x_2)^2 + 2(x_2+2x_3)^2 - x_3^2$ et $\mathrm{mat}_{BOG}(q) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1 \end{pmatrix}$

• Comptage des racines d'un polynôme par les formes quadratiques

[DVT] thm: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P = n$, on note $\alpha_1 \dots \alpha_n$ les racines complexes de P (avec multiplicité) et $s_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i$. Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par :
$$\Phi(x) = \sum_{i<j} s_{i+j}\, x_i x_j \qquad \mathrm{sign}(\Phi) = (s,t)$$
Alors le nombre de racines réelles distinctes de P est $s-t$ et son nombre de racines complexes distinctes est $s+t$.

[GRI] [GOU]

2) Bidual

def: On appelle bidual l'espace $E^{**} = \mathcal{L}_K(E^*, K)$

On a donc $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$ d'où $E^{**} \simeq E$, et l'isomorphisme est canonique :

prop: L'application $\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto \Phi_x : \begin{cases} E^* \to K \\ f \mapsto f(x) \end{cases} \end{cases}$ est un isomorphisme canonique.

rq: Résultat faux en dimension infinie.

↳ prop: Soit $(f_1 \dots f_n)$ une base de E^*, alors $\exists !$ base $(e_1 \dots e_n)$ de E telle que $\forall i$, $e_i^* = f_i$. On l'appelle base antéduale de $(f_1 \dots f_n)$.

↳ Via l'isomorphisme canonique $E \simeq E^{**}$, chercher la base biduale d'une base de E^* revient à chercher sa base antéduale.

3) Orthogonal dual

def: • $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x) = 0$ [GOU]

• Si $A \subset E$, on appelle orthogonal de A le sev de E^* $A^\perp := \{\varphi \in E^* \,/\, \forall x \in E, \varphi(x) = 0\}$

• Si $B \subset E^*$, on appelle orthogonal de B le sev de E $B^\circ = \{x \in E \,/\, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$

rq: Si $\varphi \in E^*$, $\ker \varphi = \{\varphi\}^\circ$

prop: • $A \subset B \subset E \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
• $A \subset B \subset E^* \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$
• $A \subset E \Rightarrow A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$
• $B \subset E^* \Rightarrow B^\circ = \mathrm{Vect}(B)^\circ$

thm: • $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$ $\forall F \subset E$
• $\dim G + \dim G^\circ = \dim E^*$ et $G^{\circ\perp} = G$ $\forall G \subset E^*$

rq: L'égalité $G^{\circ\perp} = G$ est fausse en dimension infinie, ex: $G = \mathrm{Vect}\langle \varphi_n : P \mapsto P^{(n)}(0) \rangle \subset \mathbb{R}[X]$, $P \in G^\circ \Leftrightarrow P = 0$ par la formule de Taylor, d'où $G^\circ = \{0\}$ et $G^{\circ\perp} = E^* \neq G$.

Cor: • Soient $f_1 \dots f_p \in E^*$ linéairement indépendantes alors $\{f_1 \dots f_p\}^\circ = \{x \in E \,/\, f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$ est de dimension $n-p$.
• Réciproquement, soit F est un sev de dimension q, alors $\exists$ $f_1 \dots f_{n-q}$ formes linéaires indépendantes telles que $F = \{f_1 \dots f_{n-q}\}^\circ$

↳ App°: 1) Soient $f_1 \dots f_p, g \in E^*$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker g$ alors $g \in \mathrm{Vect}(f_1 \dots f_p)$ [FNG]

2) Soit $F = \mathrm{Vect}\langle v_1, \dots v_p \rangle \subset \mathbb{R}^n$, on a $\dim F^\circ = n-p$; on peut alors trouver un système d'équation de F à $n-p$ lignes. [GRI]

ex: $E = \mathbb{R}^5$, $F = \mathrm{Vect}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ où $v_1 = (1,3,-2,2,3)$ $v_2 = (1,4,-3,4,2)$ et $v_3 = (2,3,-1,-2,9)$ alors $x \in F \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$

prop :
- $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $(A\cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$
- $(A+B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
- $(A\cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$

prop : Si H est un hyperplan de E, alors $H^\perp$ est une droite de E^*

[Ecu1]

III TRANSPOSÉE ET APPLICATIONS

1) Premières propriétés et calcul de bases

On notera E et F deux k-ev de dimensions finie p et q.

déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. $\forall f \in F^*$, on a $f\circ u \in E^*$ et on appelle transposée de u l'application $^tu : \begin{cases} F^* \to E^* \\ f \mapsto f\circ u \end{cases}$.

Matriciellement, soit B une base de E, B' une base de F, on note $mat_{B'}(f) = (\alpha_1 \dots \alpha_q)$ et $mat_B(f\circ u) = (\beta_1 \dots \beta_p)$ alors $(\beta_1 \dots \beta_p) = (\alpha_1 \dots \alpha_q)\, mat_B^{B'}(u)$ d'où en transposant $^t(\beta_1 \dots \beta_p) = {}^t mat_B^{B'}(u)\, {}^t(\alpha_1 \dots \alpha_q)$ donc $mat_{B^*}^{B'^*}(^tu) := {}^t mat_B^{B'}(u)$.
où B^* (resp. B'^*) base duale de B (resp. B').

prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :
- $\mathrm{Im}\,u^\circ = \ker(^tu)$ et $rg\,u = rg\,^tu$
- $\mathrm{Im}\,^tu = (\ker u)^\perp$ et $\ker(^tu) = (\mathrm{Im}\,u)^\perp$

prop : Soit G un autre k-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors : $^t(v\circ u) = {}^tu \circ {}^tv$

↳ App : 1) Changement de base duale : On se donne B une base de E, B^* sa base duale et B' une autre base de E. On veut déterminer les coordonnées de B'^* dans la base B^*. On note pour $f \in E^*$, $x \in E$, $(\alpha_1 \dots \alpha_p) = mat_{B^*}(f)$ et $(\alpha'_1 \dots \alpha'_p) = mat_{B'^*}(f)$.
$X = mat_B(x)$ et $X' = mat_{B'}(x)$, on a $X = P_B^{B'} X'$
d'où $(\alpha_1 \dots \alpha_p)\, P_B^{B'} = (\alpha'_1 \dots \alpha'_p)$
ie $P_{B^*}^{B'^*} = {}^t(P_B^{B'})^{-1}$

↳ 2) Base antéduale : On se donne B base de E, B^* base de E^* et B'^* une autre base de E.
On a donc $P_{B^*}^{B'^*} = {}^t(P_B^{B'})^{-1}$ d'où $P_B^{B'} = {}^t(P_{B^*}^{B'^*})^{-1}$
on peut alors lire B' dans les colonnes de $P_B^{B'}$.

2) Trigonalisation

prop : Soit F un sev de E, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ^tu.

↳ App : Si $x \in E^*$ est vecteur propre de ^tu alors kx est stable par ^tu donc $(k.x)^\circ$ est un hyperplan de E stable par u. On ramène donc en dimension $n-1$ un problème de dimension n. On peut alors démontrer par récurrence le thm suivant :

thm : $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur k.

rq : Si k est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

Références :

* GOU1 & GOU2 - Gourdon, Algèbre & Analyse
* GRI - Grifone, Algèbre linéaire
* FNG1 - Francinou - Nicolas - Gianella, oraux x-ens algèbre 1
* P - Perrin, Cours d'algèbre
* GAN - Gantmacher, théorie des matrices tome 2

Théorème des extremas liés

Référence : Gourdon : Analyse p. 317 et 327

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f, g_1, \dots, g_r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\Gamma = \{x \in U \,|\, g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Idée : maximiser (ou minimiser) f sur un sous-ensemble de U de la forme de Γ.

Théorème (Théorème des extremas liés de Lagrange)

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $\mathrm{D}g_1(a), \dots, \mathrm{D}g_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que

$$\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a).$$

Preuve :

1. Soit $s = n - r$. On peut identifier $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On écrit donc les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme (x, y) où $x = (x_1, \dots, x_s)$ et $y = (y_1, \dots, y_r)$.
Posons $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$.
Déjà, $r \leqslant n$ car les formes linéaires $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une famille libre et la dimension de l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ est n.
De plus, si $r = n$, le théorème devient évident car les $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.
On peut donc supposer que $r < n$, ie $s \geqslant 1$.

2. Les formes linéaires $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forment une famille libre, ainsi la matrice :
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$
est de rang r [1].
On peut donc [2] en extraire une sous-matrice $r \times r$ inversible. Quitte a changer le nom des variables, on peut supposer que :
$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \neq 0$$
Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \dots, g_r)$ par : $D_y g(a)$ est inversible.

3. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut donc trouver un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a)(\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction de classe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :
$$(x \in U', (x, y) \in \Omega \text{ et } g(x, y) = 0) \Leftrightarrow (y = \varphi(x))$$
En d'autre termes, sur un voisinage de a, les éléments de Γ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. Comme $a \in \Gamma$, on a $\beta = \varphi(\alpha)$

1. car r lignes donc au plus r et les $\mathrm{D}g_i(a)$ forment une famille indépendantes. Or les $\mathrm{D}g_i(a)$ sont une combinaison linéaire des dérivées partielles. Supposons par l'absurde que les r lignes soient liées. Avec les deux combinaisons linéaires combinées (ahah) on arrive à une absurdité.
2. cf Debeaumarché

4. Posons $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_n) : x \in U' \subset \mathbb{R}^s \mapsto (x, \varphi(x))$. Alors $\psi(x) \in \Gamma$ par le TFI. Posons également, sur U', $h = f \circ \psi$.
Comme $h(\alpha) = f(a)$, h admet un extremum local en α (car f admet un extremum local sur Γ en a).
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$,

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha)$$

En remarquant que $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$ et que $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$. Et comme $a = \psi(\alpha)$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = 0$$

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur U' donc pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ c'est également le cas pour $g_k \circ \psi$. Donc, par un calcul similaire à celui du dessus, pour $i \in [\![1, s]\!]$:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) = 0$$

Si on considère donc la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

Les s premiers vecteurs colonnes de M s'expriment, d'après les deux formules aux dérivées partielles ci-dessus, linéairement en fonction de ses r derniers vecteurs colonnes, donc $\text{rg}(M) \leqslant r$. Ainsi les $r+1$ lignes de M forment une famille liée.[3]
Ceci entraine l'existence de réels $\mu_0, \dots, \mu_r$ non tous nuls tels que :

$$\mu_0 \mathrm{D}f(a) + \mu_1 \mathrm{D}g_1(a) + \cdots + \mu_r \mathrm{D}g_r(a) = 0$$

Comme la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_i$ est libre, $\mu_0 \neq 0$ donc en posant $\lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu_0}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, on obtient

$$\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a).$$

■

Théorème (Théorème des fonctions implicites)

(Rouvière) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, (a, b) un point de U, et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^r)$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $\mathrm{D}_y f(a,b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible, i.e $\det D_y f(a,b) \neq 0$.
Alors l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V (voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^s$), W (voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^r$), avec $V \times W \subset U$, et une unique application $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus, $\mathrm{D}_y f(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$.

3. Plus précisément, ça vient de $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(M)$, le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes de M

Formes de Hankel

Akita

ENS Rennes, 2013-2014

Référence : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Caldero-Germoni.

Développement pour les leçons :
- 142. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
- 144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
- 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 171. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Intérêt : étant donné $P \in \mathbb{R}[X]$, le but du jeu est de construire une forme quadratique réelle de signature (a, b) telle que $a + b =$(nb de racines distinctes de P) et $a - b =$(nb de racines réelles distinctes de P).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons n son degré, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ses racines (réelles et complexes) distinctes et $m_1, \dots, m_l$ leurs multiplicités respectives. Posons[1] $s_k := \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i^k$ et $q(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$. q est une forme quadratique réelle car

$$\begin{aligned} s_k &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum(\text{racines complexes}) \\ &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum m_i(\alpha_i^k + \overline{\alpha_i}^k) \\ &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum m_i 2\mathrm{Re}(\alpha_i^k) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Ce sont les sommes de Newton.

Notons (a,b) la signature de q et posons également, pour $k \in [\![1,l]\!]$, $\varphi_k(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1}x_i$. Les φ_k sont des formes linéaires de $\mathbb{C}^n$. Montrons qu'elles forment une famille libre. Si $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k\varphi_k = 0$ alors (en notant $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$) : $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k\varphi_k(e_i) = 0$, ie : $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k\alpha_k^{i-1} = 0$, d'où[2] :

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_l)\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_l & \dots & \alpha_l^{l-1} \end{pmatrix} = 0$$

Le déterminant de la matrice est un déterminant de Vandermonde non nul car les α_i sont distincts. Donc les λ_i sont nuls et la famille $(\varphi_k)_{k=1,\dots,l}$ est libre. Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l} m_k\varphi_k(x)^2 &= \sum_{k=1}^{l} m_k(\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1}x_i)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} m_k\alpha_k^{i+j-2}x_ix_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2}x_ix_j \\ &= q(x) \end{aligned}$$

Donc $l = \mathrm{rg}(q) = a+b$.

Pour le second résultat, remarquons que si α_k est une racine complexe de P alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\mathrm{Re}(\varphi_k)^2 - 2\mathrm{Im}(\varphi_k)^2$, aussi $\mathrm{sign}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = (1,1)$.

Notons r le nombre de racines réelles distinctes de P et (quitte à réordonner les racines de P) supposons que les $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ sont les racines réelles de P. Alors, en regroupant les racines complexes et leurs conjuguées dans la deuxième somme et en remarquant qu'il y a $l-r$ racines complexes distinctes, on obtient :

$$q = \sum_{k=1}^{r} m_k\varphi_k^2 + \sum_{r+1}^{r+\frac{l-r}{2}} m_k(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

Or la signature de la première somme est égale à $(r,0)$ et celle de la deuxième est égale à $(\frac{l-r}{2},\frac{l-r}{2})$ donc $a = r + \dfrac{l-r}{2} = r+b$ et alors $r = a-b$.

2. Remarquer que $l \leq n$ et donc ce qu'on fait là est légitime.