Soient $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

I - Définitions et premiers résultats :

Def 1.1 : On appelle <u>forme linéaire</u> une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Ex 1.2 : i) Soit $a\in\mathbb{R}$. $ev_a : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a)$.

ii) $tr : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto tr(M)$

iii) Soit K un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
$I : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_K P(x)\,dx$

Def 1.3 : On appelle <u>espace dual de E</u> l'ensemble $E^* := \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E.

Def 1.4 : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On appelle <u>base duale de $(e_1,\dots,e_n)$</u> la famille $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ de E^* définie par :
$\forall i,j\in[\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$.

Ex 1.5 : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Sa base duale est $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ telle que :
$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \forall i\in[\![1,n]\!], e_i^*(x)=x_i$.

Prop 1.6 : i) Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ sa base duale. Alors $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base de E^*.
ii) L'ensemble E^* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Def 1.7 : Soit $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ une base de E^*. On appelle <u>base antéduale de $(e_1^*,\dots,e_n^*)$</u> la base $(e_1,\dots,e_n)$ de E définie par :
$\forall i,j\in[\![1,n]\!], e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$.

Ex 1.8 : Soient $a_0,\dots,a_n$ $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ on définit $\varphi_i : \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$, $P\mapsto P(a_i)$. Les $(\varphi_i)_{i=0..n}$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$. Alors la famille $(P_i)_{i=0,n}$ définie par : $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P_i=\prod_{j=0, j\neq i}^{n}\frac{(X-a_j)}{(a_i-a_j)}$, est la base antéduale des $(\varphi_i)_{i=0,n}$.

Rmq : Il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre E et E^*.

DVPT 1

Thm 1.9 : L'application $\phi : M_n(\mathbb{K}) \to (M_n(\mathbb{K}))^*$, $A \mapsto (f_A : X\mapsto tr(AX))$ est un isomorphisme.

Cor 1.10 : Soit $f\in(M_n(\mathbb{K}))^*$ tq $\forall X,Y\in M_n(\mathbb{K}), f(XY)=f(YX)$.
Alors, il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tq pour tout $X\in M_n(\mathbb{K})$, $f(X)=\lambda\, tr(X)$.

Cor 1.11 : Soit $n\geq 2$. Alors tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ a une intersection différente de $\{0\}$ avec $GL_n(\mathbb{K})$.

Def 1.12 : On appelle <u>bidual de E</u> le dual de E^*.

Ex 1.13 : Soit $x\in E$. L'application ev_x définie par :
$ev_x : E^* \to \mathbb{K}$, $u \mapsto u(x)$
appartient au bidual de E.

Prop 1.14 : L'application $\varphi : E \to E^{**}$, $x\mapsto ev_x$ est un isomorphisme, appelé isomorphisme de bidualité.

II - Orthogonalité et transposition :

II-1. Orthogonalité :

Def 2.1 : Soient $u\in E^*$ et $x\in E$. On dit que x et u sont <u>orthogonaux</u> si $u(x)=0$.

Ex 2.2 : $X-1$ et l'évaluation en 1 d'un polynôme sont orthogonaux.

Def 2.3 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle <u>orthogonal de F</u> l'ensemble $F^\perp$ des formes linéaires qui s'annulent sur F.

Def 2.4 : Soit G un sous-espace vectoriel de E^*. On appelle <u>orthogonal de G</u> l'ensemble $G^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de G.

Prop 2.5 : Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :
$i)\ (F^{\perp})^{\perp} = F$, $ii)\ (F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$, $iii)\ F^{\perp}+G^{\perp} = (F\cap G)^{\perp}$

Rmq : La proposition 2.5 reste vraie pour F, G deux sous-espaces vectoriels de E^*.

Prop 2.6 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E^* et :
$$\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$$

Prop 2.7 : Soit G un sous-espace vectoriel de E^*. Alors $G^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E et :
$$\dim(G) + \dim(G^{\perp}) = \dim(E)$$

II-2. Transposition :

Def 2.8 : Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle transposée de f l'application notée ${}^tf$ définie par :
$$\begin{aligned} {}^tf : F^* &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto v\circ f \end{aligned}$$

Prop 2.9 : L'application ${}^tf$ est une application linéaire de F^* vers E^*.

Prop 2.10 : L'application transposition : $f \mapsto {}^tf$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ vers $\mathcal{L}(F^*,E^*)$.

Prop 2.11 : $i)\ \mathrm{Ker}({}^tf) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$
$ii)\ \mathrm{Im}({}^tf) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$

Prop 2.12 : i) Si f est injective, ${}^tf$ est surjective.
ii) Si f est surjective, ${}^tf$ est injective.

Prop. 2.13 : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F, $\mathcal{C}^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$ sa base duale et $g \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*}({}^tg) = {}^tM.$$

III- Application à la géométrie projective :

Def 3.1 : On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Prop 3.2 : L'application qui à toute forme linéaire associe son noyau induit une surjection de $E^*-\{0\}$ dans l'ensemble des hyperplans de E.
Réciproquement, à tout hyperplan de E on peut associer une forme linéaire non-nulle.

Prop 3.3 : On identifie l'ensemble des hyperplans de E à l'espace projectif de E^*, $P(E^*)$.

Def 3.4 : On appelle plan projectif un plan affine complété par la droite à l'infini.

Def 3.5 : On appelle birapport de quatre points M, N, A, B alignés la quantité :
$$[M,N,A,B] = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}}$$
avec les conventions :
i) $[M,\infty,A,B] = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$; $[M,N,\infty,B] = \frac{\overline{NB}}{\overline{MB}}$; $[M,N,A,\infty] = \frac{\overline{MA}}{\overline{NA}}$.
ii) $[N,N,A,B] = [M,N,A,A] = 1$; $[A,N,A,B] = [M,N,A,N] = 0$;
$[B,N,A,B] = [M,A,A,B] = \infty$.

Def 3.6 : On appelle birapport de quatre droites A, B, C, D concourantes la quantité $[a,b,c,d]$, où a, b, c, d sont les points d'intersection respectifs de A, B, C, D avec une droite Δ.

Thm 3.7: Soit P un plan projectif. Alors :
Toute propriété de P faisant intervenir des relations d'intersection entre droites, et d'appartenance entre points et droites, reste vraie si on la traduit en échangeant entre elles les expressions suivantes :

i) point **et** droite

ii) Le point a appartient à la droite D **et** la droite A contient le point d

et les expressions qui s'en déduisent :

iii) le point d'intersection de deux droites **et** la droite passant par deux points

iv) points alignés **et** droites concourantes

v) birapport de quatre points alignés **et** birapport de quatre droites concourantes

Le nouvel énoncé obtenu est dit dual du précédent.

Ex 3.8 : Théorème de Desargues
Soient deux triplets a, b, c ; a', b', c' de points tous distincts de P tels que les droites aa', bb', cc' soient distinctes. Alors :
Si ces droites concourent, les points d'intersection $ab \cap a'b'$, $bc \cap b'c'$, $ca \cap c'a'$ sont alignés.

DVPT 2

Références :

- Algèbre Linéaire, Rémi Goblot
- Toute l'algèbre du 1er cycle, Jean-Pierre Escofier
- Algèbre Linéaire, cours et exercices, Henri Roudier
- Géométries affine, projective et euclidienne, Claude Tisseron
- Tout-en-un pour la licence, L1, Jean-Pierre Ramis, André Warusfel
- Algèbre Linéaire, Jean-Charles Savioz