159

Formes linéaires & dualité en dimension finie. Exemples & applications.

1) Définition et espace dual [Grd]

Cadre : On se donne $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I Formes linéaires et structure des espaces duaux

déf 1.1 : Une forme linéaire sur E est une application linéaire $u : E \to \mathbb{K}$.

ex. 1.2 : - $E = \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ - $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto Tr(A)$
- $E = \mathbb{R}^n$, U ouvert de E ; si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

déf 1.3 : $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé espace dual de E.

rem. 1.4 : E^* est lui-même un $\mathbb{K}$-ev, on peut donc définir $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E, ainsi que E^{***}, etc.

déf 1.5 : Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ les formes linéaires coordonnées e_i^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $\forall j \in [\![1, n]\!]$

thm 1.6 : $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de $\mathcal{B}$.

rem. 1.7 : On en déduit que $\boxed{E \simeq E^*}$, mais non-canoniquement.

ex. 1.8 [LAA] : $E = \mathbb{R}_n[X]$, $a \in \mathbb{R}$. Une base de E est $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$, dont la base duale est $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $\varphi_k(P) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, $\forall P \in E$.

prop. 1.9 [FGN] : L'application $A \mapsto (f_A : M \mapsto Tr(AM))$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$.

thm 1.10 [Rou] : (Hahn-Banach en dimension finie) On considère $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ un sev, et $f : V \to \mathbb{R}$ une FL. Alors il existe une FL $\tilde{f}$ sur E telle que $\tilde{f}_{|V} = f$ et $|||\tilde{f}||| = |||f|||$, où $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée de $\|\cdot\|$.

2) Espace bidual et formes bilinéaires [AF] E, F sont 2 $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies

déf 1.11 : Une forme bilinéaire $b : E \times F \to \mathbb{K}$ est une application linéaire en chacune de ses variables. On note $b_x : \begin{cases} F \to \mathbb{K} \\ y \mapsto b(x,y) \end{cases}$ et $b_y : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto b(x,y) \end{cases}$. b est dite non-dégénérée si $\bigcap_{x \in E} Ker(b_x) = \{0_F\}$ et $\bigcap_{y \in F} Ker(b_y) = \{0_E\}$.

déf. 1.12 : On note $\boxed{ev : \begin{cases} E^* \times E \to \mathbb{K} \\ (\varphi, x) \mapsto \varphi(x) \end{cases}}$, c'est une FB canonique de $E^* \times E$.

prop. 1.13 : ev est non-dégénérée.

thm. 1.14 : Une FB $b : E \times F \to \mathbb{K}$ est non dégénérée si et seulement si $ev_E : \begin{cases} E \to F^* \\ x \mapsto b_x \end{cases}$ est un isomorphisme. (et alors $\dim E = \dim F$)

cor. 1.15 : $\boxed{E \simeq E^{**} \text{ canoniquement}}$, via l'isomorphisme ev_E pour $F := E^*$.

cor. 1.16 : $\forall$ FB $b : E \times E \to \mathbb{K}$ non dégénérée, $\forall \varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $\exists!\, x \in E$ tel que $\boxed{\varphi(y) = b(x, y)}$

app. 1.17 : définition du gradient pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: si $f : U \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in U$, alors $d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

app. 1.18 : définition du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique : $\forall (u_1, u_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\exists!\, w \in \mathbb{R}^3 / \det(u_1, u_2, v) = \langle w, v \rangle$ $\forall v \in \mathbb{R}^3$, et $u_1 \wedge u_2 := w$.

3) Bases duales et antéduales [Grd]

prop. 1.19 : Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ de E à la base $\mathcal{B}_2$ (de E), alors ${}^tP^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$.

prop. 1.20 : Si $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^*, alors il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E, appelée base antéduale de $\mathcal{C}$, telle que $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$.

ex. 1.21 : $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, dont la base antéduale est $\left(\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

app. 1.22 [Rdr] : (Interpolation de Lagrange) $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tous distincts. On pose, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $ev_{a_i} : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ P \mapsto P(a_i) \end{cases}$. Alors $(ev_{a_1}, \dots, ev_{a_n})$

est une base de E^*, dont la base duale est $(L_1,\dots,L_n)$ où $L_i(X) := \prod_{l\neq i} \frac{X-a_l}{a_i-a_l}$. Ainsi, $\forall P\in E$, $P(X)=\sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i(X)$.

app. 1.23: (réduction des formes quadratiques) Ici, $\mathrm{car}(\mathbb{K})\neq 2$. Soit $q:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ une FQ. Alors $\exists\, l_1,\dots,l_r$ FL indépendantes telles que $q=\sum_{i=1}^{r} l_i^2$, et q est diagonalisable dans la base antéduale des l_i (quitte à compléter la famille (l_i) pour avoir une base)

II Hyperplans [Perrin]

déf. 2.1: Un sev $H\subset E$ est un hyperplan s'il admet un supplémentaire de dimension 1.

prop. 2.2: Soit $\varphi\in E^*$. Si $\varphi\neq 0$, alors φ est surjective et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.

cor. 2.3: On peut déduire de 1.9 que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$ [FGN]

déf. 2.4: Soit $f\in E^*\setminus\{0\}$. Soient $H=\mathrm{Ker} f$ et $(e_1,\dots,e_{n-1})$ une base de H. Soit $a\in E\setminus H$, complétons la base de H en $(e_1,\dots,e_n)$ de telle sorte que la composante de a suivant e_n vaille 1. On pose $u(x)=x+f(x)a$.
- u est une dilatation de rapport $\lambda\neq 0$ si $a=e_n$ et $f(e_n)=\lambda-1$
- u est une transvection si $f(e_n)=1$ (et $a=e_n+\sum_{i=1}^{n-1}a_ie_i$).

thm. 2.5:
- Les transvections engendrent $SL(E)$
- Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

III Orthogonalité et sous-espaces vectoriels [Grd]

1) Orthogonalité

déf-prop 3.1:
- $x\in E$ et $\varphi\in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x)=0$.
- $\forall A\subset E$, $A^\perp := \{\varphi\in E^* / \varphi(x)=0\ \forall x\in A\}$ est un sev de E^* appelé orthogonal de A.
- $\forall B\subset E^*$, $B^\circ := \bigcap_{\varphi\in B} \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sev de E appelé orthogonal de B.

ex 3.2: $E=\mathbb{R}_n[X]$, $X-1$ et ev_1 sont orthogonaux.

prop. 3.3: Si $A_1,A_2\subset E$ et si $B_1,B_2\subset E^*$, on a
$$A_1\subseteq A_2 \Rightarrow A_2^\perp\subseteq A_1^\perp \quad\text{et}\quad A^\perp=\mathrm{Vect}(A)^\perp$$
$$B_1\subseteq B_2 \Rightarrow B_2^\circ\subseteq B_1^\circ \qquad\quad B^\circ=\mathrm{Vect}(B)^\circ$$

$\boxed{\text{thm. 3.4:}}$ Si $F\subseteq E$ est un sev, si $G\subseteq E^*$ est un sev, on a :
$$\dim F+\dim F^\perp=\dim E \qquad\qquad F^{\perp\circ}=F$$
$$\dim G+\dim G^\circ=\dim E^* \quad\text{et}\quad G^{\circ\perp}=G$$

cor 3.5: Si $H\subset E$ est un hyperplan, $\exists!\,\varphi\in E^*\setminus\{0\}$ telle que $\mathrm{Ker}(\varphi)=H$, à multiplication par un scalaire près.

prop. 3.6: Si $A_1,A_2\subset E$ sont des sev, si $B_1,B_2\subset E^*$ sont des sev, on a :
$$(A_1+A_2)^\perp=A_1^\perp\cap A_2^\perp \quad\text{et}\quad (A_1\cap A_2)^\perp=A_1^\perp+A_2^\perp$$
$$(B_1+B_2)^\circ=B_1^\circ\cap B_2^\circ \qquad\qquad (B_1\cap B_2)^\circ=B_1^\circ+B_2^\circ$$

2) Sous-espaces vectoriels

app. 3.7:
- F sev de E, $\dim F=q$, alors $\exists\, n-q$ FL $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ indépendantes telles que $F=\{x\in E / \forall i\in[\![1,n-q]\!],\ \varphi_i(x)=0\}=\bigcap_{i=1}^{n-q}\mathrm{Ker}(\varphi_i)$.
- réciproquement, si F est défini par $n-q$ FL φ_i indépendantes, alors on peut trouver $v_1,\dots,v_q$ linéairement indépendants tels que $F=\langle v_1,\dots,v_q\rangle$

ex. 3.8: [Grd] $E=\mathbb{R}^5$, $F=\langle v_1,v_2\rangle$ où $v_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\\3\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, alors $\dim(F^\perp)=3$ et $\exists\,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in E^* / F^\perp=\langle\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\rangle$, où les φ_i sont indépendantes. Or $F=(F^\perp)^\circ=\{x\in E / \varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi_3(x)=0\}$. En utilisant le fait que $\varphi_i(v_1)=\varphi_i(v_2)=0$, on trouve $\varphi_1(x)=-x_1+x_2+x_3$, $\varphi_2(x)=4x_1-2x_2+x_4$ et $\varphi_3(x)=-6x_1+x_2+x_5$.

IV Transposition [Grd]

E_1, E_2 et E_3 désignent des $\mathbb{K}$-ev de dim finies.

déf. 4.1: Soit $u\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$. ${}^tu:\begin{cases}E_2^*\to E_1^*\\ f\mapsto f\circ u\end{cases}$ est une application linéaire appelée application transposée de u.

app. 4.1.5: existence de l'adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien.

prop. 4.2: $\forall u\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$, on a $rg(u)=rg({}^tu)$, $\mathrm{Im}({}^tu)=\mathrm{Ker}(u)^\perp$ et $\mathrm{Ker}({}^tu)=\mathrm{Im}(u)^\perp$.

prop. 4.3 : Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont des bases de E_1 et E_2 respectivement, et si $v \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*}({}^t v) = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(v))$.

app. 4.4 : [sans référence]

Si les lampes sont reliées (ou non) entre elles de façon à former un graphe connexe, si en appuyant sur une lampe on inverse son état (allumé ou éteint) et ceux de ses voisines directes, et si toutes les lampes sont éteintes dans la configuration initiale, alors il existe une façon d'appuyer sur les lampes pour qu'elles soient toutes allumées en même temps, en un nombre fini de coups.

prop. 4.5 : $v \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $v \in \mathcal{L}(E_2, E_3) \Rightarrow {}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

prop. 4.6 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subseteq E$ un sev. Alors

$$\boxed{F \text{ est stable par } u \iff F^\perp \text{ est stable par } {}^t u}.$$

app 4.7 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

app. 4.8 : (trigonalisation simultanée) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v sont trigonalisables et commutent, alors ils sont cotrigonalisables.

app. 4.9 : (décomposition de Frobenius) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $F_1, \dots, F_r \subset E$ des sev stables par f tels que :

DVPT 1

- $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $f_i := f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique (i.e. il existe $x \in F_i$ tel que $(x, f_i(x), \dots, f_i^{\dim F_i - 1}(x))$ est une base de F_i)
- si $r \geq 2$, en notant $\mathcal{P}_i$ le polynôme minimal de f_i, on a $\mathcal{P}_{i+1} \mid \mathcal{P}_i$ $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$.

V Application de la dualité à la différentielle [Rouv]

déf 5.1 : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit que $f_1, \dots, f_n : V \to \mathbb{R}$ forment un changement de coordonnées sur V si $f := (f_1, \dots, f_n)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$.

ex 5.2 : Le passage en coordonnées polaires, avec $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0\}$ et $W = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$.

thm 5.3 : Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in V$, soient $f_1, \dots, f_n : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les f_i forment un changement de coordonnées sur un voisinage de a si et seulement si la famille $(d_a f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

app. 5.4 : résolution d'EDP du 1er ordre comme $(y-z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur $\mathbb{R}^3$.

thm 5.5 : (Extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

DVPT 2

$\Gamma := \{x \in U / g_i(x) = 0 \ \forall i \in [\![1, r]\!]\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $(d_a g_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une famille libre, alors il existe un unique r-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ / $d_a f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_a g_i$. [Grdan]

app. 5.6 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

VI Application à la géométrie projective [Aud]

déf 6.1 : $P(E) := E\setminus\{0\}/\sim$ où, $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* / x = \lambda y$.

$P(E)$ est appelé espace projectif de E, et sa dimension est définie comme étant $\dim(E) - 1$.

Dans toute la suite, $\dim(E) = 3$.

déf. 6.2 : Une droite projective de $P(E)$ est l'image d'un plan vectoriel de E par la projection canonique $\pi : E \to P(E)$.

thm 6.3 : (Pappus) Si d et d' sont deux droites projectives distinctes, si A, B, C (resp. A', B', C') sont trois points distincts de d (resp. de d'), alors les points d'intersection $\alpha = (BC') \cap (B'C)$, $\beta = (AC') \cap (A'C)$ et $\gamma = (AB') \cap (A'B)$ sont alignés.

(cf annexe)

prop. 6.4 : $P(E^*)$ est un espace projectif de dimension 2, et on a les correspondances suivantes :

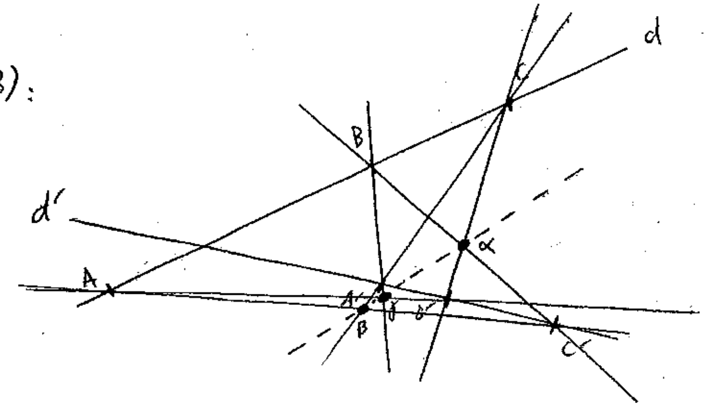
dans $P(E)$	point A	droite (AB)	$A \in d$	points alignés
dans $P(E^*)$	droite a	point $a \cap b$	$D \ni a$	droites concourantes

thm 6.5 : (Pappus dual) Si D et D' sont deux points projectifs distincts, si a, b, c (resp. a', b', c') sont trois droites distinctes concourantes en D (resp. D'), alors les droites $\tilde{\alpha} = (b \cap c' \ b' \cap c)$, $\tilde{\beta} = (a \cap c' \ a' \cap c)$ et $\tilde{\gamma} = (a \cap b' \ a' \cap b)$ sont concourantes.

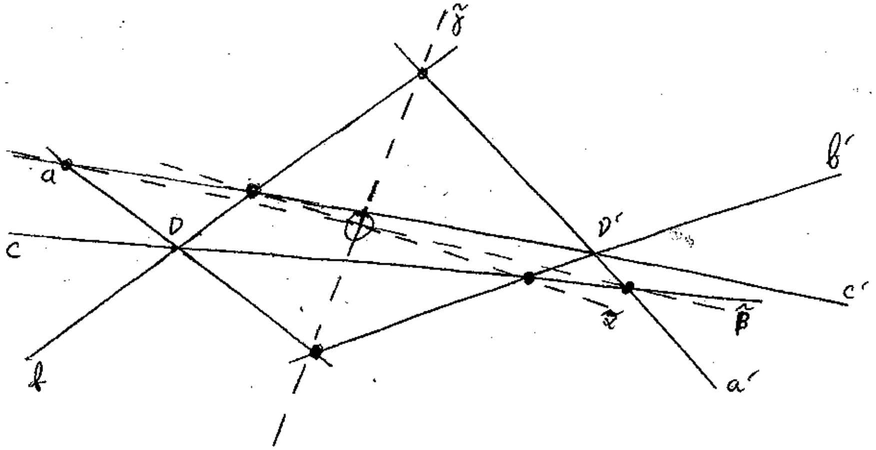
(cf. annexe)

ANNEXE :

PAPPUS (6.3) :



PAPPUS DUAL (6.5) :



<u>Références :</u>

[Grd] : Gourdon, <u>Algèbre</u>, p. 126-134 et 228

[Per] : Perrin, <u>Cours d'algèbre</u>, p. 96-100

[Rouv] : Rouvière, <u>Petit guide de calcul différentiel</u>, exos 63, 71, 102 (édition 2007)

[Aud] : Audin, <u>Géométrie</u>, p 28 et 187-190

[AF] : Arnaudiès, Fraysse, <u>Algèbre bilinéaire et géométrie</u>, p. 1-11.

[Rdr] : Roudier, <u>Algèbre linéaire</u>, p. 349 et 362

[Gri] : Grifone, <u>Algèbre linéaire</u>, p. 88-89

[Grd an] : Gourdon, <u>Analyse</u>, p. 317 et 327

[FGN] : Oraux X-ENS, <u>algèbre 1</u>, exos 7.8 et 7.9

[LAA] : Laamri, Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MP, p. 69.