Formes linéaires et dualité en dimension finie. Ex. & applications.

159

E ev de dim finie

I) Espace dual

1) Formes linéaires

Def 1: On appelle forme linéaire sur E, une application $\omega : E \to \mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E^* et est dit espace dual de E.

Ex 2: Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $g \in E$. $I : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ $\in E^*$.

DEV 1

Ex 3: Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$: $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(X) = tr(AX)$.

App 4: L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Prop 5: Soit $n = \dim E$ et $\omega \in E^*, \omega \neq 0$. Alors $\dim(\operatorname{Ker} \omega) = n-1$.
Le noyau de ω est dit hyperplan de E déterminé par ω.

Ex 6: $\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

2) Base duale

Prop 7: $\dim E = \dim E^*$. En particulier E et E^* sont isomorphes.

Thm 8: Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.
Les formes linéaires $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ définies par $\theta_i(e_k) = \delta_{ik}$ sont une base de E^* dite base duale de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Ex 9: Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de $\mathbb{R}^3$ avec :
$e_1 = (1,1,1)$; $e_2 = (1,0,-1)$; $e_3 = (0,1,1)$
Sa base duale est $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ avec :
$\theta_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$; $\theta_2(x) = x_2 - x_3$; $\theta_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$

Ex 10: Polynômes de Lagrange
Soit $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec les a_i 2 à 2 distincts.
On pose : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\omega_k : P \mapsto P(a_k)$
Soit $\{L_1, \dots, L_n\}$ les polynômes de Lagrange relatifs à $(a_1, \dots, a_n)$.
Alors $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est la base duale de $\{L_1, \dots, L_n\}$.

Ex 11: Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, $P \in E$ et $a \in \mathbb{K}$. D'après la formule de Taylor la base $\{f_0, \dots, f_n\}$ de E^* où $f_k : P \mapsto P^{(k)}(a)$ est la base duale de $\{Q_0, \dots, Q_n\}$ de E où $Q_k(X) = \frac{(X-a)^k}{k!}$

Ex 12: Polynômes de Newton.
On note $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X(X-1)\dots(X-n+1)$
Soit $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$; $P \mapsto P(X+1) - P(X)$
Alors la famille $\left(\frac{P_n}{n!}\right)_{n \in [\![0,p]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$,
de base duale la famille $(P \mapsto \Delta^n(P)(0))_{n \in [\![0,p]\!]}$.

Def 13: On appelle bidual de E, $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$

Prop 14: E^{**} est canoniquement isomorphe à E.

Prop 15: Soit $\{f_1, \dots, f_n\}$ base de E^*. Il existe une unique base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E dont la base duale est $\{f_1, \dots, f_n\}$.
$\{e_1, \dots, e_n\}$ est appelée base antéduale de $\{f_1, \dots, f_n\}$.

II) Application transposée et orthogonalité

Def 16:
Soit E, F deux ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
$\forall f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$.
L'application linéaire $F^* \to E^*$, $f \mapsto f \circ u$ est appelée application transposée de u notée ${}^t u$.

Prop 17: Soient $h, f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(G,E)$

i) ${}^t(f+h) = {}^tf + {}^th$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, {}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^tf$

iii) ${}^t(f \circ g) = {}^tg \circ {}^tf$

iv) ${}^t({}^tf) = f$

v) f bijective $\Rightarrow \begin{cases} {}^tf \text{ bijective} \\ ({}^tf)^{-1} = {}^t(f^{-1}) \end{cases}$

Def 18: Soit $A \subset E$ et $B \subset E^*$.

i) $A^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ est un sev de E^* appelé orthogonal de A.

ii) $B^\circ = \{x \in E, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$ est un sev de E appelé orthogonal de B.

Prop 19: Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ base de F avec F sev de E.
Alors $F^\perp = \{w \in E^*, w(v_1) = 0, \dots, w(v_p) = 0\}$

Prop 20: Soient A_1, A_2 sev de E, B_1, B_2 sev de E^*:

i) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2^\perp \subset A_1^\perp$

ii) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_2^\circ \subset B_1^\circ$

iii) $A \subset E \Rightarrow A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$

iv) $B \subset E^* \Rightarrow B^\circ = (\mathrm{Vect}\, B)^\circ$

Thm 21: Soient F sev de E et G sev de E^*.

i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

ii) $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$

Prop 22: Soient A_1, A_2 sev de E et B_1, B_2 sev de E^*

i) $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$

ii) $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

iii) $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$

iv) $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

Prop 23: Soit H hyperplan de E. $H^\perp$ est une droite de E^*.

Ex 24: Soit $F \subset \mathbb{R}^5$ engendré par $v_1 = (1,3,-2,2,3)$, $v_2 = (1,4,-3,4,2)$, $v_3 = (2,3,-1,-2,9)$. Alors $F^\perp = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ où
$\varphi_1(x) = -x_1 + x_2 + x_3$; $\varphi_2(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_4$; $\varphi_3(x) = -6x_1 + x_2 + x_5$

Thm 25: Invariants de similitude.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $F_1, F_2, \dots, F_r$ de sev de E, tous stables par f telle que:

i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$

ii) $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $f_i := f_{|F_i}$ est un endomorphisme de F_i cyclique

iii) Si $P_i = \Pi_{f_i}$, on a: $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} \mid P_i$

La suite de polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

DEV 2

Thm 26: Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que: $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$
(où $C(P_i)$ est la matrice compagnon de P_i)

Coro 27: $f, g \in \mathcal{L}(E)$ semblables $\Leftrightarrow$ f et g ont les mêmes invariants de similitude.

Prop 28: Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

i) $\mathrm{Ker}({}^tf) = \mathrm{Im}(f)^\perp$

ii) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}({}^tf)$

iii) $\mathrm{Im}({}^tf) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$

III) Où apparaissent les formes linéaires?

1) Différentielle

Def 29: Soient E et F deux $\mathbb{R}$-evn et U ouvert de E.
Une application $f : U \to F$ est dite différentiable au point a de U s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(a+h) - f(a) = L(h) + o(h)$

Ex 30 : Fonction réelle d'une variable réelle. $E=F=\mathbb{R}$
Soit $a\in E$. Soit $f\in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. La différentielle de f en a est la forme linéaire $h \mapsto f'(a).h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Formes quadratiques

Def 31 : On appelle forme quadratique sur E toute application Φ de la forme $\Phi : E \to \mathbb{K}, x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Prop 32. Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ tq: $\forall x\in E, \Phi(x)=\varphi(x,x)$
φ est appelée forme polaire de q et: $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}[\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)]$

Def 33 : Soit $A\subset E$, on appelle orthogonal de A selon Φ l'ensemble $A^{\perp}=\{y\in E, \forall x\in A, \varphi(x,y)=0\}$

Rmq 34 : Si on définit $B=\{\varphi(x,.), x\in A\}\subset E^*$ alors $A^{\perp}$ est l'orthogonal (au sens dual) de B ie $A^{\perp}=B^{\circ}$.

Def 35 : On appelle noyau de Φ le sev défini par :
$\mathrm{Ker}\,\Phi = E^{\perp}=\{x\in E, \forall y\in E, \varphi(x,y)=0\}$.

Prop 36 : Soit F sev de E.
i) $\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E+\dim(F\cap \mathrm{Ker}\,\Phi)$
ii) $F^{\perp\perp}=F+\mathrm{Ker}\,\Phi$.

3) Intégration

Ex 37 : Soit $E=\mathbb{R}_m[X]$
$\forall P\in E, \forall (a_1,\dots,a_m)\in \mathbb{R}^{m+1}$, a_i 2 à 2 distincts,
$\int_0^1 P(t)\,dt=\sum_{k=0}^{m} c_k P(a_k)$

Rmq 38 : Dans l'exemple 2, si on ne fixe plus g, l'application I devient une forme bilinéaire de $E\times E\to\mathbb{R}$.

Rmq 39 :
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bilin}(E\times E,\mathbb{K}) & \xrightarrow[\sim]{\text{iso. linéaire}} & \mathcal{L}(E,E^*) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Bilin\,ND}(E\times E,\mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{bij}} & I(E,E^*) \end{array}$$

Ex 40. En reprenant l'exemple 2, et en remplaçant la mesure sur $[0,1]$ en une mesure $\rho(x)dx$ où ρ poids on obtient une forme bilinéaire : $u(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\rho(x)dx$
u symétrique définie positive donc non dégénérée.
Par la remarque 39 u peut être vu comme un isomorphisme entre E et E^*.

4) Ouverture à la dimension infinie

Thm 41. Soit E espace de Hilbert.
L'application de E dans E' définie par $y\mapsto \Phi_y=(.|y)$ est une isométrie surjective.
C'est à dire : $\forall \varphi\in E', \exists! y\in E, \forall x\in E, \Phi(x)=(x|y)$
et de plus $\|\Phi\|=\|y\|$.

Rmq 42 : E' est l'ensemble des formes linéaires continues de E.