159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et Applications

I. Formes linéaires et espace dual : Premières propriétés

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Formes linéaires et dual

Def 1 : On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires est alors appelé espace dual et est noté E^*.

Ex 2 : La différentielle d'une application réelle différentiable est une forme linéaire.

Ex 3 : On considère l'application trace : $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$.
C'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Rem 4 : Comme E est de dimension finie, toute forme linéaire est continue.

Contre-ex 5 : Ce n'est pas vrai en dimension infinie.
On peut prendre $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(3)$ et l'on munit E de la norme : $\|P\| := \max_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Il suffit alors de considérer la suite $P_n(X) := \left(\frac{X}{2}\right)^n$.

Def 6 : On appelle hyperplan de E, tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Prop 7 : Soit φ une forme linéaire non nulle, i.e. $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$.
Alors $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ et $\dim(\ker \varphi) = n-1$: le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

Prop 8 : Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème 9 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à son dual [Dev 1]

Appli 10 :
- En outre si $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, f vérifie $f(XY) = f(YX)$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$
- On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soit $\psi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un morphisme d'algèbre. Alors p divise n et l'on a $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:
$$\mathrm{Tr}(\psi(M)) = \frac{n}{p}\mathrm{Tr}(M)$$
$$\text{et } \mathrm{rg}(\psi(M)) = \frac{n}{p}\mathrm{rg}(M)$$
- En particulier $\mathrm{End}_{alg}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Aut}_{alg}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

Appli 11 : Pour tout $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

2. Base duale, antéduale et bidual

Def 12 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la forme linéaire e_i^* définie sur $\mathcal{B}$ par :
$$\begin{cases} e_i^*(e_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ e_i^*(e_i) = 1 \end{cases}$$
s'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i.

Théorème 13 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$ et donc l'on a :
$$\dim E = \dim E^* = n$$
De plus, pour tout $\varphi \in E^*$, on a l'égalité : $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.

Appli 14 : On a l'isomorphisme non canonique suivant : $E \simeq E^*$

Ex 15 : Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $(n+1)$ points distincts.
On note L_i les polynômes interpolateurs de Lagrange des a_i.
Alors $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de E et $L_i^*(P) := P(a_i)$ donne la base duale.

Ex 16 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ avec :
$e_1 := (1,1,1)$; $e_2 := (1,0,-1)$; $e_3 := (0,1,1)$
Alors la base duale de (e_1, e_2, e_3) est $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ avec :
$\varphi_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$; $\varphi_2(x) = x_2 - x_3$; $\varphi_3(x) := -x_1 + 2x_2 - x_3$

Def 17 : On appelle bidual de E, l'espace dual de E^* noté E^{**}.

Théorème 18 : L'espace E est canoniquement isomorphe à E^{**} via :
$$\Phi : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \varphi_x : \left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Rem 19 : En dimension infinie, Φ est injective mais pas toujours surjective.

Prop 20 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $e_i^* = f_i$.
Cette base s'appelle base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$.

Ex 21 : En considérant la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ donnée par les $f_{i,j} := \mathrm{Tr}(E_{i,j} \,\cdot)$ où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires
Alors la base antéduale des f_{ij} est celle des $e_{i,j} := E_{j,i}$.

Ex 22 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E.
On considère $f_1^* := 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$; $f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*$; $f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$
Alors (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et sa base antéduale relative à la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par :
$$f_1 = \frac{1}{13}(6,-2,3) \; ; \; f_2 = \frac{1}{13}(-3,1,5) \; ; \; f_3 = \frac{1}{13}(-2,5,-1).$$

II. Orthogonalité, hyperplans et transposée

1. Généralités sur l'orthogonalité

Def 23 : Les éléments $x\in E$ et $\varphi\in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x)=0$.

Ex 24 : e_i et e_j^* sont orthogonaux si et seulement si $i\neq j$.

Def 25 : • Soit $A\subset E$, on définit : $A^\perp := \{\varphi\in E^* \mid \forall x\in A, \varphi(x)=0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E^* appelé orthogonal de A.

• Soit $B\subset E^*$, on définit : $B^\circ := \{x\in E \mid \forall \varphi\in B, \varphi(x)=0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E appelé orthogonal de B.

Ex 26 : Si $\varphi\in E^*$, alors $\{\varphi\}^\circ$ est le noyau de φ.

Théorème 27 : • Soit F un sous-espace vectoriel de E,
Alors : $\dim F+\dim F^\perp=\dim E$ et $(F^\perp)^\circ=F$

• Soit G un sous-espace vectoriel de E^*,
Alors : $\dim G+\dim G^\circ=\dim E$ et $(G^\circ)^\perp=G$

Appli 28 : En dimension finie, un sous-espace vectoriel est égal à l'espace tout entier si et seulement si son orthogonal est nul.

Rem 29 : En dimension infinie on a encore $(F^\perp)^\circ=F$ mais plus forcément $(G^\circ)^\perp=G$. (On peut s'en convaincre en prenant $E=\mathbb{R}[X]$ et G le s.e.v de E^* engendré par les formes linéaires $\varphi_n : P\longmapsto P^{(n)}(0)$ $\forall n\in\mathbb{N}$)

Appli 30 : Soit $E=\mathbb{R}^5$ et $F:=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$
où $v_1:=(1,3,-2,2,3)$; $v_2:=(1,4,-3,4,2)$; $v_3:=(2,3,-1,-2,9)$
On obtient alors : $F^\perp=\mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ avec :
$\varphi_1(x)=-x_1+x_2+x_3$; $\varphi_2(x)=4x_1-2x_2+x_4$; $\varphi_3(x)=-6x_1+x_2+x_3$

Théorème 31 : (Equations d'un sous-espace vectoriel en dimension finie)

• Soient p formes linéaires : $\varphi_1,\dots,\varphi_p\in E^*$ telles que $rg(\varphi_1,\dots,\varphi_p)=r$. Alors le sous-espace vectoriel $F=\{x\in E \mid \forall i\in[\![1,p]\!], \varphi_i(x)=0\}$ est de dimension $n-r$.

• Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension q. Alors il existe $n-q$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ telles que $F=\{x\in E \mid \forall i\in[\![1,n-q]\!], \varphi_i(x)=0\}$

• En particulier on en déduit la dimension d'une intersection d'hyperplans par la correspondance entre formes linéaires et hyperplans.

Prop 32 : Soient A_1 et A_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :
(i) $(A_1+A_2)^\perp=A_1^\perp\cap A_2^\perp$ (ii) $(A_1\cap A_2)^\perp=A_1^\perp+A_2^\perp$
Soient B_1 et B_2 deux sous-espaces vectoriels de E^*. Alors :
(iii) $(B_1+B_2)^\circ=B_1^\circ\cap B_2^\circ$ (iv) $(B_1\cap B_2)^\circ=B_1^\circ+B_2^\circ$

2. Hyperplans et points extrémaux

Prop 33 : Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

Rem 34 : De manière plus générale, si F est un s.e.v de E de codimension finie, alors $F^\perp$ est un s.e.v de E^* de dimension $\mathrm{codim}_E F$.

Def 35 : Soit C un convexe non vide fermé d'un espace euclidien E. On appelle hyperplan d'appui de C en $x\in C$ un hyperplan affine H de E passant par $x\in C$ tel que C soit contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par H.

[Dev 2]

Prop 36 : Soit $x\in C$ tel que $x\in\partial C$. Alors, il existe un hyperplan d'appui de C en x.

Théorème 37 : (Krein-Milman) : Soit K un convexe compact non vide de E (euclidien). Un point $a\in K$ est dit extrémal lorsque $K\setminus\{a\}$ est convexe. Alors K est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

3. Applications transposées

Def 38 : Soient E, F deux K-espaces vectoriels (de dim quelconque). Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $f\in F^*$, on a $f\circ u\in E^*$.
L'application linéaire $F^*\to E^*$, $f\mapsto f\circ u$ est appelée application transposée de u et est notée ${}^tu$.

Prop 39 : Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors on a : (i) $rg(u)=rg({}^tu)$ (ii) $\mathrm{Im}({}^tu)=(\ker u)^\perp$
Et aussi, (iii) $\ker({}^tu)=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$ où u est défini def 38.

Prop 40 : Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels et $u\in\mathcal{L}(E,F)$ puis $v\in\mathcal{L}(F,G)$ alors on a : ${}^t(v\circ u)={}^tu\circ{}^tv$.

Théorème 41 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^tu$.

Appli 42 : Soient $f,g\in\mathcal{L}(E)$ (où E est un K-ev de dim. finie) trigonalisables et qui commutent. Alors il existe une base commune de trigonalisation.

III. Diverses applications de la dualité.

1. Applications en analyse fonctionnelle et géométrie

Théorème 43 : (Représentation de Fréchet-Riesz)
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, pour toute forme linéaire $\Phi \in \mathcal{H}^*$, il existe un unique $y \in \mathcal{H}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{H}$, $\Phi(x) = \langle x, y \rangle$

Ex 44 : Soit $\mathcal{H} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est un Hilbert en dimension finie)
Pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{H}$, il existe unique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \varphi(A)$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Appli 45 : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, pour toute application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe une autre application linéaire continue notée T^* appelée adjoint de T tel que :
$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$
De plus : $\|T^*\| = \|T\|$.

Lemme 46 : Soient $f_1, \dots, f_p$ et g des formes linéaires sur un espace vectoriel E (de dim. quelconque). On suppose que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker g$. Alors $g \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

Théorème 47 : (Extrémas liés) On définit $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ où les $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de E contenant C et $f : U \to \mathbb{R}$. Si x^* est un extremum local de f dans C, que f est différentiable en x^* et que les différentielles $dg_1(x^*), \dots, dg_m(x^*)$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :
$$df(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, dg_i(x^*) = 0$$

Appli 48 : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique (i.e. tel que $u^* = u$). Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 49 : (Hahn-Banach, forme géométrique) :
Soit E un espace vectoriel normé. Soit C et K deux parties non vides de E disjointes ($C \cap K = \emptyset$) et telles que C soit convexe et fermée puis que K soit convexe et compacte.
Alors il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle que :
$$\sup_{x \in C} \mathrm{Re}(\varphi(x)) < \inf_{y \in K} \mathrm{Re}(\varphi(y))$$

Rem 50 : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $\sup_{x \in C} \mathrm{Re}(\varphi(x)) < \alpha < \inf_{y \in K} \mathrm{Re}(\varphi(y))$
Alors l'hyperplan affine réel fermé : $\mathcal{H}_\alpha := \{x \in E \mid \mathrm{Re}\,\varphi(x) = \alpha\}$ sépare strictement C et K.

Def 51 : Lorsque E est un espace réel, on dit qu'une partie de E est un demi-espace fermé s'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que cette partie s'écrive :
$$\mathcal{H}_\alpha^+ := \{x \in E \mid \varphi(x) \geq \alpha\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_\alpha^- := \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \alpha\}$$

Appli 52 : Toute partie convexe et fermée d'un e.v.n réel est égal à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

2. Applications en théorie des probabilités

Lemme 53 : Soit $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$, espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue φ sur $\mathcal{H}$, il existe un unique $g \in \mathcal{H}$ tel que : $\forall f \in \mathcal{H}$, $\varphi(f) = \int_X f(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x)$.

Théorème 54 : (Version faible du théorème de Radon-Nikodym)
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures positives finies sur $(X, \mathcal{T})$. Supposons que $\forall A \in \mathcal{T}$: $\nu(A) \leq \mu(A)$. Alors il existe une fonction f mesurable telle que ν soit la mesure de densité de f par rapport à μ, c'est à dire telle que : $\forall A \in \mathcal{T}$, $\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x) f(x) \, d\mu(x)$

Rem 55 : On admet la version forte de Radon-Nikodym :
Si μ et ν sont des mesures σ-finies telles que $\nu \ll \mu$, i.e absolue continuité de ν par rapport à μ qui signifie : "$\forall A \in \mathcal{T}$ $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$". Alors il existe une fonction f mesurable positive telle que : $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{T}$. La fonction f est alors appelée la densité de ν par rapport à μ et est notée $f = d\nu / d\mu$.

Appli 56 : Si une loi de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est absolument continue par rapport à une mesure μ, et si X (variable aléatoire) est de loi P, on dira que X admet la densité f par rapport à μ si $f = dP/d\mu$. Dans le cas où μ est la mesure de Lebesgue on dit que X est de densité f.

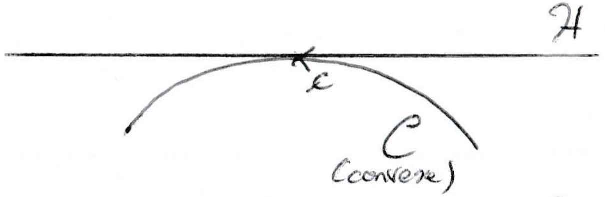
Ex 57 : Si l'on définit $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ par le fait que : $dP(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \, d\lambda(x)$
Alors en prenant $\mu = \lambda$ (où λ est la mesure de Lebesgue)
On retrouve que X est à densité $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ car $dP_X \ll d\lambda$

Def 58 : Soit Ω un espace topologique muni de sa tribu borélienne et d'une probabilité P.
- On dit que $(P_n)_n$ une suite de probabilités est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $P_n(K) \geq 1 - \varepsilon$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
- On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires est tendue si la suite des lois $(P_{X_n})_n$ correspondante est tendue.

Prop 59 : Sur $\mathbb{R}^d$ (où $d \geq 1$), toute loi de probabilité est tendue.

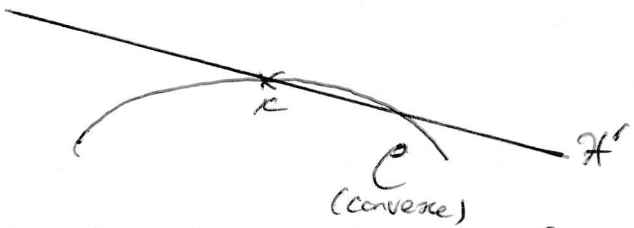
Appli 60 : Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires réels de dimension $d \geq 1$. Alors il existe un vecteur aléatoire X de dimension d et une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_n$ de $(X_n)_n$ tels que : $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Figure 1 :



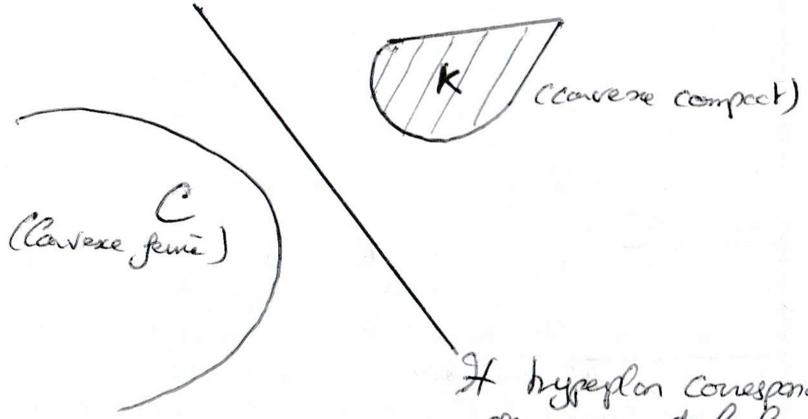
$\mathcal{H}$ est un hyperplan d'appui de C en $x \in C$.

Figure 2 :



$\mathcal{H}'$ est un hyperplan passant par $x \in C$ mais n'est pas un hyperplan d'appui de C en $x \in C$.

Figure 3 :



$\mathcal{H}$ hyperplan correspondant au noyau de la forme linéaire continue φ.

Illustration du théorème de Hahn-Banach géométrique.