159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ un corps.

I-Formes linéaires, dual et bidual en dimension finie; hyperplan

1)Forme linéaire, espace dual, base duale

Définition 1. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires de E dans $\mathbb{K}$ est noté E^*. C'est un $\mathbb{K}$-ev appelé espace dual de E.

Notation 2. Si $x \in E$ et $\phi \in E^*$, on note parfois $\phi(x) =< \phi, x >$.

Exemple 3.

- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto Tr(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $\begin{array}{rcl} ev_a : \mathbb{R}_n[X] & \to & x \\ P & \mapsto & P(a) \end{array} \in \mathbb{R}_n[X]^*$.
- Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $g \in E$. Alors $I : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array} \in E^*$.

Exemple 4. Soit $\mathcal{B} := (e_i)_{i \in I}$ une base de E. L'application $p_i : x \mapsto x_i$ de E dans $\mathbb{K}$ qui associe au vecteur x de E sa coordonnée d'indice i est une *forme linéaire* sur E, que l'on peut noter e_i^*. Cette forme est caractérisée par la relation $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et s'appelle *forme linéaire coordonnée* d'indice i.

Proposition 5. Toute forme linéaire sur E s'écrit comme combinaison linéaire des p_i définies précédemment, où les p_i sont les projections relativement à une base donnée. Si E a pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ...e_n)$, on note pour tout i allant de 1 à n $e_i^* = p_i$.

Théorème 6. Soit $B = (e_1, .., e_n)$ une base de E. Alors $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de B et donc $dim(E^*) = dim(E)$. Pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*$.

Exemple 7. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, où
$\{e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 0, -1), \quad e_3 = (0, 1, 1)\}$. La base duale est donnée par :
$\{e_1^*(x) = x_1 - x_2 + x_3, \quad e_2^*(x) = x_2 - x_3, \quad e_3^*(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3\}$.

Proposition 8. E et E^* sont isomorphes.

Remarque 9. L'isomorphisme n'est pas canonique, il dépend des bases choisies.

2) Bidual et base anteduale

Définition 10. On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}

Théorème 11. Si $x \in E$ on note $\tilde{x} : \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$. On a $\tilde{x} \in E^{**}$ et l'application $\Phi : x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme.

Remarque 12. Cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la base de E. On convient alors d'identifier E à E^{**} en identifiant x à $\tilde{x}$.

Proposition 13. Soit $(f_1, ...f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, .., e_n)$ de E telle que pour tout i, $f_i = e_i^*$. Cette base s'appelle base anteduale de $(f_1, ..., f_n)$

Exemple 14. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient $f_1^*, f_2^*, f_3^* \in E^*$ définis par $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*$, $f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$. Alors (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et sa base anteduale est : $f_1 = \frac{1}{13}(6e_1 - 2e_2 + 3e_3)$, $f_2 = \frac{1}{13}(-3e_1 + e_2 + 5e_3)$ et $f_3 = \frac{1}{13}(-2e_1 + 5e_2 - e_3)$.

Exemple 15. On considère la base de $\mathcal{M}_n(K)^*$ donnée par les $e_{i,j}^* : M \mapsto Tr(E_{ij}M)$, où $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires. Alors la base antéduale $B = (e_{ij})_{i,j}$ des $e_{i,j}^*$ est $B = (E_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$.

3) Forme linéaire, hyperplan, trace

Proposition 16. Soit $f \in E^*$ non nulle alors $Ker(f)$ est un hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Corollaire 17. Le rang d'une forme linéaire non nulle est 1 (ie $\dim(Im(f)) = 1$).

Théorème 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application f définie par :
$$f : \begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* & & \\ A & \mapsto & f_A : & X & \mapsto Tr(AX) \end{array}$$
réalise un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual $(M_n(\mathbb{K}))^*$.

Remarque 19. On en déduit que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit : $M \mapsto Tr(AM)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 20. Soit $f \in M_n(\mathbb{K})^*$ vérifiant $f(XY) = f(YX)$ pour toutes matrice X et Y. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(X) = \lambda Tr(X)$.

Application 21. Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$

Application 22. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

- (i) il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AM + MA = B$.
- (ii) pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC + CA = 0$, on a $Tr(BC) = 0$.

Proposition 23. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Application 24. ($\mathbb{K}$ est supposé de caractéristique nulle). On note Tr_p la trace sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et Tr_n la trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Ψ un morphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors p divise n.

II-Orthogonalité et applications transposées

1) Orthogonalité, annulateur d'un sous-espace

Définition 25. Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dit orthogonaux si $\varphi(x) =< \varphi, x >= 0$
Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* | \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble $A^\perp$ est un sev de E^* appelé orthogonal de A.
Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E | \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble B° est un sev de E appelé orthogonal de B.

Exemple 26. Soit $u = (1, 0, 0)$ et $\varphi(x) = x_2 + x_3 \quad \forall x \in E$. $\varphi(u) = 0$ donc u et φ sont dits orthogonaux.

Exemple 27. e_i est orthogonal à e_j^* pour tout $i \neq j$.

Exemple 28. Si (e_i^*) est la base duale de (e_i) et si $\forall i \neq j, \quad e_i$ et e_j sont orthogonaux, alors $\forall i \neq j, \quad e_i^*$ et e_j^* sont orthogonaux.

Remarque 29. Si $\varphi \in E^*$, alors $\{\varphi\}^\circ$ est le noyau de φ.

Proposition 30. Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$
Si $B_1 \subset B_2 \subset E^*$, alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.

Proposition 31. Si $A \subset E$ et si $B \subset E^*$, alors $A^\perp = (vectA)^\perp$ et $B^\circ = (vectB)^\circ$

Théorème 32.

- Si F est un sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$
- Si G est un sev de E^*, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$

Corollaire 33. En dimension finie, un sous-espace est égal à l'espace tout entier ssi son orthogonal est nul.

2) Conséquences : équations d'un sev en dimension finie, hyperplan

Corollaire 34. (Equation d'un sous-espace vectoriel) Soient p formes linéaires $\phi_1, ...\phi_p$ de E^* telles que $rg(\phi_1, ..., \phi_p) = r$. Le sev $F = \{x \in E | \forall i, \phi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n - r$. Réciproquement si F est un sev de dimension q, il existe $n - q$ formes linéaires linéairement indépendantes telles $\phi_1, ...\phi_{n-q}$ telles que $F = \{x \in E | \forall i, \phi_i(x) = 0\}$.

Proposition 35. Soient A_1, A_2 deux sev de E et B_1, B_2 deux sev de E^*

- $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ et $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$
- $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$ et $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

Exemple 36. Soit $F \subset \mathbb{R}^5$ engendré par
$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3), \quad v_2 = (1, 4, -3, 4, 2), \quad v_3 = (2, 3, -1, -2, 9)$ alors $F^\perp = \{f_1, f_2, f_3\}$ où $f_1(x) = -x_1 + x_2 - x_3, \quad f_2(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_4, \quad f_3(x) = -6x_1 + x_2 + x_5$.

Proposition 37. Soit $\phi \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Alors Kerϕ est un hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan H de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 38. Soit H un hyperplan de E alors l'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

Corollaire 39. Deux formes linéaires f_1 et f_2 non nulles ont même noyau ssi elles sont proportionnelles: si $H = \ker f_1 = \ker f_2$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.

Remarque 40. Si F est un sev de E de codimension finie alors $F^\perp$ est un sev de E^* de dimension codim$_E(F)$.

3) Applications transposées

Définition 41. Soit E et F deux $K-$ev. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$. L'application linéaire : $\begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ f & \mapsto & f \circ u \end{array}$ est appelé application transposée de u et est noté ${}^t u$.

Proposition 42. Soit E et F deux K-ev de dimension finie. On a :

- $rg(u) = rg({}^t u)$
- $Im({}^t u) = (Ker(u))^\perp$
- $Ker({}^t u) = (Im(u))^\perp$

Corollaire 43. Une matrice et sa transposé ont même rang.

Proposition 44. Soit E, F, G trois K-ev , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ^t v$.

Proposition 45. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sev F de E est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Application 46. $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi son polynôme carcatéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque 47. En identifiant E et F à leurs biduaux respectifs on a l'identité ${}^t({}^t u) = u$

Application 48. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables et qui commutent alors il existe une base commune de trigonalisation.

Proposition 49. (Applications transposées) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. Soient $p = \dim E$, et $q = \dim F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, B une base de E et B' une base de F. Soit $f \in F^*$ et $g = f \circ u$. Alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases duales de B et de B' est la transposée de la matrice de u dans les bases B et B'.

Proposition 50. (Changement de base dans le dual) Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie de dimension n. Soit B une base de E et B^* une base de E^*. Si C est la matrice de passage de la base B à la base B^*, alors la matrice de passage de B^* à B'^* est ${}^t C^{-1}$.

III-Méthodes de dualité en algèbre, applications en analyse, dualité et polynômes

1) Méthodes de dualité

2.1 En algèbre linéaire

Exemple 51. Soit E un $\mathbb{K}$ ev, ϕ_1,...,$\phi_p \in E^*$ et $\phi : E \to \mathbb{K}^p$ définie par $\phi = (\phi_1, ..., \phi_p)$. Alors ϕ est surjective ssi ϕ_1,...,ϕ_p sont linéairement indépendantes.

Application 52. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(f) =^t Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Application 53. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Alors f ne possède que deux plans stables par f qui sont :

$$P_1 = E_1^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4x + 2y - 3z = 0\}$$

$$P_2 = E_2^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y - z = 0\}$$

2.2 Groupe Orthogonal

Théorème 54. (Hahn-Banch géométrique) Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, Fun sev de E et A un ouvert convexe de E tel que $A \cap F = \emptyset$ alors il existe un hyperplan H de E tel que $F \subset H$ et $A \cap H = \emptyset$

Corollaire 55. Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé et $\mathcal{C}$ un convexe compact non vide de E alors $x \in \mathcal{C}$ ssi $\forall f \in E^*, \quad f(x) \leq \sup_{x \in \mathcal{C}} f(x)$

Théorème 56. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $||.||_2$.

Théorème 57. $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité : $O_n(\mathbb{R}) = Extr(\overline{B})$.

2) De quelques formes linéaires en analyse

2.1 Différentielle

Exemple 58. La différentielle d'une application réelle différentiable est une application linéaire.

Théorème 59. (Extrémas liés) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $f, g_1, ..., g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}), \quad \Gamma = \{x \in U \quad |\forall i \in [\![1, r]\!] g_i(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d_{g_i}a$ sont linéairement indépendantes alors $d_f a \in Vect(d_{g_i}a)$. (Ses coordonnées sont les multiplicateurs de Lagrange de a)

2.2 Applications

Application 60. En considérant $f(x_1, ..., x_n) = x_1, ..., x_n$ et $\Gamma = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n | \sum x_i = 0\}$ on retrouve l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall (x_1, ...x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Application 61. (Inégalité de Hadamard) Pour tout $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$, on a $|det(v_1, ..., v_n)| \leq ||v_1||...||v_n||$. Il y a égalité ssi un des v_i est nul ou si les v_i forment une base orthogonale de E.
Géométriquement, cette inégalité exprime que, pour des cotés de longeur donnée, un parallélépipède est de volume maximal s'il est rectangle.

3) Dualité et polynômes

3.1 Bases duales et polynômes

Application 62. (Polynomes de Lagrange) Soit $E\mathbb{K}_{n-1}[X]$, $(a_1, ...a_n) \in K^n$ avec les a_i deux à deux distincts. Soit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $w_k : P \mapsto P(a_k)$. Soit $\{L_1, ...L_n\}$ les polynômes de Lagrange relatifs à $(a_1, .., a_n)$ définis par $L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$ alors $\{w_1, ..., w_n\}$ est la base duale de $\{L_1, ..., L_n\}$.

Application 63. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $(a_0, a_1, ...a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec les a_i deux à deux distincts. Alors il existe un $(n + 1)$-uplet $\{c_0, ..., c_n\}$ de scalaires tels que pour tout $P \in E$,

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$$

Application 64. (Formule de Taylor) Soit $E = K_n[X], \quad P \in E$ et $a \in K$. D'après la formule de Taylor la base $\{f_0, .., f_n\}$ de E^* où $f_k : P \mapsto P^{(k)}(a)$ est la base duale de $\{Q_0, ..., Q_n\}$ de E où $Q(x) = \frac{(X-a)^k}{k!}$.

Application 65. (Polynomes de Newton) On note $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = X(X - 1)...(X - n + 1)$. Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & P(X + 1) - P(X) \end{array}$, alors la famille $\left(\frac{P_n}{n!}\right) n \in [\![0, p]\!]$ est une base de $K_p[X]$de base duale la famille $(P \mapsto \Delta^n(P)(0))_{n \in [\![0, p]\!]}$

3.2 Dualité et racines d'un polynôme dans un espace euclidien

Théorème 66. (Sylvester) Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base $(e_i)_i$ de E telle que si $x = \sum x_i e_i$ on a : $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$ où $r = rg(q)$ et p un entier qui ne dépend que de q (et non pas de la base). On a donc :
$Mat_{e_i}(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Le couple $(p, r-p)$ noté $sgn(q)$ est appelé signature de q.

Théorème 67. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $a_1, ..., a_n$ les racines de P (dans $\mathbb{C}$) comptées avec multiplicité. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $s_i = \sum_{k=1}^n a_k^i$, la i-ème somme de Newton. Soit q la forme quadratique réelle définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x) = q(x_0, ..., x_{n-1}) = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} x_i x_j$$

Notons (s, t) la signature de q, on a :

1. le nombre de racines complexes distinctes de P est $s + t = rg(q)$.
2. le nombre de racines réelles distinctes de P est $s - t$.

Références

- Gourdon, *Algèbre*
- FGN *algèbre 1*
- Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Gourdon, *Analyse*
- Roudier, *Algèbre linéaire : Cours et exercices*

Développements

- Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ (56)
- De la dualité dans $M_n(\mathbb{K})$ (18, 20, 21 et 23)
- Comptage des racines d'un polynome par les formes quadratiques (67)