160

N°33 - Endomorphismes remarquables d'un e.v. euclidien de dim finie

$(E, <.,.>)$ désigne un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire

I - Endomorphismes dans un e.v. euclidien

[GOU] [GR1]

1) Endomorphisme adjoint

Déf-prop 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exists ! f^* \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (x,y) \in E^2$, $<f(x), y> = <x, f^*(y)>$.

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Rmq : Découle du théorème de représentation de Riesz.

Prop 2 : $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ $\quad \mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

$f^{**} = f$ $\quad \mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E : $M_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM_{\mathcal{B}}(f)$.

Prop 3 : Si F s.e.v. stable par f, alors f^* stabilise $F^\perp$.

2) Endomorphismes orthogonaux

Déf 4 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal (ou isométrie) si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

Rmq : f est alors injectif, donc bijectif ($\dim E < \infty$)

Prop 5 : $f \in \mathcal{O}(E)$ ssi $\forall x, y \in E$, $<f(x), f(y)> = <x,y>$ ssi l'image d'une b.o.n. est une b.o.n.

Cor 6 : Si $\mathcal{B}$ b.o.n, alors $M_{\mathcal{B}}(f) =: M$ vérifie :

${}^tMM = M{}^tM = I_n \iff f \in \mathcal{O}(E)$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Rmq : $M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det M = \pm 1$.

Prop 7 : 1) $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$

2) $(O_n(\mathbb{R}), .)$ " " " " de $(GL_n(\mathbb{R}), .)$

Déf 8 : $SO(E) := \{f \in \mathcal{O}(E) ; \det f = +1\}$ est le groupe spécial orthogonal.

$O^-(E) := \{f \in \mathcal{O}(E) ; \det f = -1\}$.

[Mêmes définitions pour les matrices ...]

Rmq : $f \in \mathcal{O}(E) \iff f^* = f^{-1}$.

3) Endomorphismes symétriques, antisymétriques

Déf 9 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique (resp. antisymétrique) si $f^* = f$ (resp. $f^* = -f$).

On note $\mathcal{S}(E)$ (resp $\mathcal{A}(E)$) l'ensemble de ces endo.

Rmq : • On peut alors écrire $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus_\perp \mathrm{Im}\, f$.

• Mêmes définitions pour les matrices à l'aide de la transposée...

Prop 10 : $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Déf 11 : Si $f \in \mathcal{S}(E)$, on dit que f est positif (resp. défini positif) si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $<f(x), x> \geq 0$ (resp. >0)

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) ces ensembles.

Ex : • p est une projection orthogonale ssi $p^* = p$ et p est un projecteur

• s est une symétrie orthogonale ssi $s^* = s$ et s est une symétrie.

Rmq : En dimension 3 : $f : E \to \mathcal{A}(E)$, $u \mapsto u \wedge .$ est un isomorphisme

4) Endomorphismes normaux

Déf 12 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f^*f = ff^*$. On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes. Ex : $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{N}(E)$

Prop 13 : $f \in \mathcal{N}(E) \Rightarrow \|f^*(x)\| = \|f(x)\|$ $\forall x \in E$

Prop 14 : Si F s.e.v. stable par f, alors $F^\perp$ aussi.

II - Réduction [GOU]

1) Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Thm 15 : Soit $f \in S(E)$, alors f est diagonalisable en b.o.n. et $Sp(f) \subset \mathbb{R}$.

Cor 16 : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPMP = D$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$.

Appli : Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une b.o.n. dans laquelle $Mat(q) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Cor 17 : (orthogonalisation simultanée) Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tPAP = I_n$, ${}^tPBP = D$ avec D diagonale.

Appli : • Calcul "explicite" d'une base à la fois q_A-orthonormale et q_B-orthogonale (q_A, q_B f.q. associées à A et B)

• Calcul de $\sup_{(x,y) \neq 0} \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2}$

• Ellipsoïde de John-Loewner.

Thm 18 : Soit $H \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists ! R \in S_n^+(\mathbb{R})$, $H = R^2$

Cor 19 : (décomposition polaire) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$, $A = OS$. De plus, cette décomposition est unique lorsque $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 20 : Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPAP = D$

où $D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$ $\quad \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}$

De plus, $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.

2) Endomorphismes normaux

Thm 21 : Soit $f \in N(E)$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle $Mat(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$

$\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

3) Endomorphismes orthogonaux

Thm 22 : Soit $f \in O(E)$. Alors il existe une b.o.n. dans laquelle $Mat(f) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

III - Le groupe orthogonal $O(E)$

1) Propriétés topologiques [MNE en majorité]

Prop 23 : $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$, qui sont homéomorphes.

Prop 24 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Prop 25 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Cor 26 : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$

Prop 27 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$

Prop 28 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ DVT 2

Appli : classification des groupes à 1 paramètre à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$.

2) En dimension 2 [AUD]

Prop 29 : $O^+(E)$ est un groupe commutatif dont les éléments sont de la forme $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (rotations)

Prop 30 : Soient $u, u' \in E$ deux vecteurs unitaires, alors il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre.

Def 31 : Soit $\hat{A}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\hat{A}$ par : $(u,v)\sim(u',v')$ ssi $\exists f\in O^+(E)$, $f(u)=u'$ et $f(v)=v'$.

La classe d'équivalence de (u,v) (qui sera notée de la même façon) est appelée angle orienté de u et v.

On note $\mathcal{A} := \hat{A}/\sim$ l'ensemble des angles orientés de vecteurs.

Prop 32 : Soit $\hat{\Phi} : \hat{A} \to O^+(E)$
$(u,u') \mapsto f$ définie prop 30

Alors $\hat{\Phi}(u,u') = \hat{\Phi}(v,v')$ ssi les angles orientés (u,u') et (v,v') sont égaux.

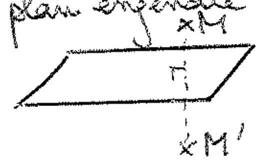
On a alors une application bijective $\Phi : \mathcal{A} \to O^+(E)$, ce qui permet d'avoir une structure de groupe sur $\mathcal{A}$: $(u,v)+(u',v') = (u'',v'')$ où :
u'' vecteur unitaire quelconque et $v'' = r'\circ r(u'')$ avec $v = r(u)$ et $v' = r(u')$

Prop 33 : Les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et D_n.

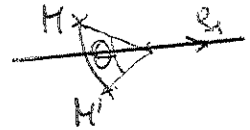
3) En dimension 3 [Aud]

Thm 34 : On distingue 3 types d'isométries vectorielles sur E. Soit $f \in O_3(E)$, alors la matrice de f s'écrit dans une certaine b.o.n. (e_1, e_2, e_3) :

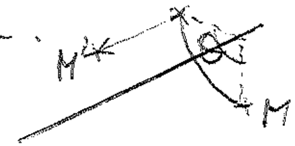
- $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$: réflexion de plan engendré par e_1, e_2



- $\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: rotation d'axe la droite engendrée par e_1 : ce sont exactement les éléments de $SO_3(E)$.



- $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: anti-rotation.



Prop 35 : Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, $\mathcal{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, et $\mathcal{A}_5$.

Références :

Gourdon, Algèbre [GOU]
Grifone, Algèbre linéaire [GRI]
Audin, Géométrie [AUD]
Mneimné-Testard (MNE)

Développements possibles :

- Réduction des endomorphismes symétriques
- $C(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}(0,1)$ + points extrémaux
- Ellipsoïde de John-Loewner
- Décomposition polaire + homéomorphisme
- Simplicité de SO_3 (Perrin p.148)
- Réduction des endo normaux (Gou)