160 — Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Cadre : $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

I / Endomorphismes dans un espace vectoriel euclidien

1) Endomorphismes adjoints

Déf-prop 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\exists! f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$\forall x,y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$
f^* est appelé l'endomorphisme adjoint de f.

Prop 2 : • Si B est une b.o.n de E, alors $Mat_B(f^*) = {}^t Mat_B(f)$.
- $(f\circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$
- $f^{**} = f$
- $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$

Prop 3 : Si F s.e.v. stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

2) Endomorphismes normaux

Déf 4 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si f^* et f commutent.
On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes normaux.

Ex 5 : $S(E)$, $\mathcal{A}(E)$, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{N}(E)$.

Prop 6 : $f \in \mathcal{N}(E) \iff \forall x,y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle f^*(x), f^*(y)\rangle$.

Prop 7 : Si F s.e.v stable par $f \in \mathcal{N}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi.

3) Endomorphismes symétriques, antisymétriques

Déf 8 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si $f^* = f$, antisymétrique si $f^* = -f$.
On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques, et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques.

Rem : On a alors $E = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$.

Prop 9 : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Déf 10 : Si $f \in S(E)$, on dit que f est positif (resp. défini positif) si $\forall x \in E\setminus\{0\}$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ (resp > 0).
On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) ces ensembles.

Ex 11 : Soient p projecteur, s symétrie, alors
- $p^* = p$ ssi p est une projection orthogonale.
- $s^* = s$ ssi s est une symétrie orthogonale.

4) Endomorphismes orthogonaux

Déf 12 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal (ou isométrie) si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

Rem : Puisque E de dim finie et f injectif, on a f bijectif.

Prop 13 : $f \in \mathcal{O}(E)$ ssi $\forall x,y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$
ssi l'image d'une b.o.n est une b.o.n.

Rem : $f \in \mathcal{O}(E) \iff$ (f est inversible d'inverse f^*).

Cor 14 : Si B b.o.n, et $M := Mat_B(f)$ alors
$f \in \mathcal{O}(E) \iff {}^tM M = M {}^tM = I_n$
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Rem : $M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det M = \pm 1$.

Prop 15 : $\mathcal{O}(E)$ sous groupe de $GL(E)$
$O_n(\mathbb{R})$ sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Déf 16 : $SO(E) := \{f \in \mathcal{O}(E) : \det f = 1\}$ le groupe spécial orthogonal.
$O^-(E) := \{f \in \mathcal{O}(E) : \det f = -1\}$.

$\boxed{\textbf{Thm 17} : SO_3(\mathbb{R}) \text{ est simple.}}$ (DEV 1)

II / Réduction

1) Endomorphismes normaux

Thm 18 : Soit $f \in \mathcal{N}(E)$, alors il existe une b.o.n. B dans laquelle $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$.

où $\forall i, \left[\begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right.$ (DEV 2)

2) Endomorphismes symétriques, antisymétriques

Thm 19 : Soit $f \in S(E)$, alors f est diagonalisable en b.o.n. et $Sp(f) \subset \mathbb{R}$.

Cor 20 : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPSP = D$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

App 21 : Si q forme quadratique sur E, alors il existe une b.o.n. B dans laquelle $Mat_B(q) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Cor 22 (orthogonalisation simultanée) : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\left\{\begin{array}{l} {}^tPAP = I_n \\ {}^tPBP = D \text{ diagonale} \end{array}\right.$

Thm 23 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists ! R \in S_n^+(\mathbb{R})$, $A = R^2$.

Cor 24 (décomposition polaire) : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$ $A = OS$. De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition est unique.

Thm 25 : Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPAP = D$.

De plus, $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad \text{où } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}).$$

3) Endomorphismes orthogonaux

Thm 26 (décomposition de Cartan) $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists \Omega_1, \Omega_2 \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $M = \Omega_1 \, diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \, \Omega_2$.

Thm 27 : Soit $f \in O(E)$, alors il existe une b.o.n. B dans laquelle $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$.

$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

III / Le groupe orthogonal $O(E)$

1) Propriétés topologiques

Prop 28 : $O_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$ qui sont homéomorphes.

Prop 29 : $SO_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs.

Prop 30 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Prop 31 : $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$.

Prop 32 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

Prop 33 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

2) En dimension 2

Prop 34 : $SO(E)$ est un groupe commutatif constitué des rotations $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Prop 35 : Soient $u,u'\in E$ deux vecteurs unitaires, alors il existe une unique rotation qui envoie u sur u'.

Déf-prop 36 (angles orientés) : Soit $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires. On définit une relation d'équivalence sur $\hat{\mathcal{A}}$ par $(u,v)\sim(u',v')$ ssi $\exists f\in SO(E) \,/\, f(u)=u'$, $f(v)=v'$.

La classe d'équivalence de (u,v) est appelée angle orienté de u et v. On note $\mathcal{A} := \hat{\mathcal{A}}/\sim$ l'ensemble des angles orientés.

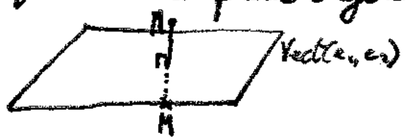
Prop 37 : $\hat{\Phi} : \hat{\mathcal{A}} \longrightarrow SO(E)$, $(u,v) \longmapsto f$ telle que $f(u)=v$.

On en déduit une bijection
$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow SO(E)$, ce qui confère à $\mathcal{A}$ une structure de groupe : $(u,v)+(u',v')=(u'',v'')$
où u'' vecteur unitaire quelconque et $v''=r'\circ r(u'')$
avec $v=r(u)$, $v'=r'(u')$.

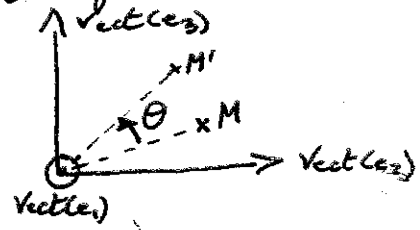
3) En dimension 3

Thm 38 : On distingue 3 types d'isométries vectorielles sur E. Soit $f\in O_3(E)$ alors il existe une b.o.n. (e_1,e_2,e_3) dans laquelle $Mat_B(f)$ s'écrit :

* $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$: réflexion de plan engendré par e_1 et e_2



* $\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: rotation d'axe $Vect(e_1)$ (c'est la forme de toutes les isométries positives).



* $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: antirotation, composée d'une réflexion de plan $Vect(e_2,e_3)$ par une rotation d'axe $Vect(e_1)$.