$(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ désigne un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, muni du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$, $\mathcal{L}(E)$ les endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices carrées réelles.

I) Quelques classes d'endomorphismes remarquables

1) Adjoints

Prop 1: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$.

DÉF 2: Cet unique endomorphisme est appelé adjoint de u, il est noté u^*.

Ex 3: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$

$\varphi_A : M \longmapsto AM - MA \qquad \varphi_A^* = \varphi_{{}^tA}$

Prop 4: Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$(\lambda f)^* = \lambda f^* \qquad (g \circ f)^* = f^* \circ g^* \qquad f^{**} = Id_E$

$\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp \qquad \mathrm{Im} f^* = (\ker f)^\perp$

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

2) Orthogonaux

DÉF 5: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dit orthogonal si :

$\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. On parle d'isométrie.

Prop 6: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

f orthogonal $\Longleftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$

$\Longleftrightarrow f \circ f^* = Id_E$

$\Longleftrightarrow$ l'image par f de toute b.o.n. est une b.o.n.

Notation: On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Ex 7: Les symétries orthogonales, les matrices de permutation sont des isométries. Les projecteurs orthogonaux ne sont pas des isométries.

Prop 8: $u \in O(E) \Rightarrow Sp(u) \subset \{\pm 1\}$

Ex 9: En dimension 2 : $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ +\sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}$

3) Symétriques, antisymétriques

Déf 10: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si $u^* = u$, et antisymétrique si $u^* = -u$. Matriciellement, cela signifie respectivement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{A}_n$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormée.

Ex 11: La matrice d'un produit scalaire est symétrique. Un projecteur orthogonal également.

Rq: $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM \in S_n$.

Prop 12: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus \mathcal{A}_n$.

DÉF 13: $f \in S_n$ est dite positive (resp. définie positive) si $\forall x \in E$, $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ (resp. $\langle f(x), x \rangle > 0$). Matriciellement, cela signifie $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+^*$). On note les ensembles respectifs S_n^+ et S_n^{++}.

4) Normaux

DÉF 14: $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Prop 15: f normal $\Longleftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^*(x), f^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$

$\Longleftrightarrow \|f(x)\| = \|f^*(x)\| \quad \forall x \in E$

Ex 16: Tous les endomorphismes précédents sont normaux.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est normal, mais ni orthogonal, ni symétrique, ni antisymétrique.

II) Réductions et applications

1) Cas des endomorphismes normaux

Lemme 17 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors E se décompose en somme directe de droites et de plans stables par f.

Lemme 18 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $F \subset E$ stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f^*.

Lemme 19 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, E_λ l'espace propre associé à la valeur propre λ. Alors E_λ est stable par f^*.

Thm 20 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \boxed{A_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix},$$

$a_i, b_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

$r + 2s = n$. $\boxed{\text{DVP}}$

2) Cas particuliers et application

Thm 21 : Soit $f \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & 0 & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_s}} \end{pmatrix} \qquad R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

$0 < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_s < \pi$

$p + q + 2s = n$

Thm 22 : Soit $f \in S_n$. Alors il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\,\mathrm{Mat}(f)P$ est diagonale.

Rq : Si $f \in \mathcal{A}_n$, on a une réduction similaire à celle du théorème 20, avec $\lambda_i = 0$, $a_j = 0$ $\forall i, j$.

Cor 23 : si ϕ est une forme quadratique sur E, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale réelle.

Application : • Etude du comportement de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 au voisinage d'un point critique a non dégénéré (i.e. $Df(a) = 0$ et $\det(D^2f(a)) \neq 0$) :

- Si $D^2f(a)$ est définie positive, f admet un minimum local strict en a.
- Si $D^2f(a)$ est définie négative, f admet un maximum local strict en a.
- Si $\det(D^2f(a)) < 0$, f admet un point col en a.

Cor 24 : Si $M \in S_n^{++}$, $N \in S_n$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP$ est diagonale réelle.

Application : • Calcul "explicite" d'une base à la fois q_M-orthonormée et q_N-orthogonale.

• Calcul de $\displaystyle\sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2}$

• Ellipsoïde de John-Loewner

Thm 25 : Soit $H \in S_n^+$, alors $\exists! R \in S_n^+$ telle que $R^2 = H$.

III) Le groupe orthogonal $O(E)$

1) Aspects algébriques et topologiques

Prop 26 : $SO_n(\mathbb{R}) \lhd O_n(\mathbb{R})$

Thm 27 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple $\boxed{\text{DVP}}$

Prop 28 : $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $\{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = -1\}$.

Prop 29 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Prop 30 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop 31 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) O(E) pour décomposer

Thm 32: $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
$\boxed{\text{DVP}}$ $(O, S) \longmapsto OS$

Applications: • $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $SL_n(\mathbb{R})$.

• $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(M, O_n(\mathbb{R})) = \| \sqrt{{}^tMM} - I_n \|$

Cor 33: $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists (\Omega_1, \Omega_2) \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle positive telle que $M = \Omega_1 D \Omega_2$.

Thm 34: Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = QR$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure.

Rq: Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, on a une décomposition similaire avec $Q \in O_m(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Application: résolution des système surdéterminés
$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = {}^tQb$$

3) Classification des isométries en dimensions 2 et 3

Prop 35: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$. Alors :

• Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, A s'interprète comme une rotation de centre O et d'angle θ.

• Soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, A s'interprète comme une symétrie orthogonale par rapport à la droite polaire d'angle $\theta/2$

Prop 36: Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, $A \neq \pm I_3$.

• Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, A est la matrice d'une rotation autour de l'axe E_1 dont l'angle non orienté θ est donné par : $\operatorname{Tr} A = 2\cos\theta + 1$

• Si $A \notin SO_3(\mathbb{R})$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, A est la matrice d'une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$, dont l'angle est donné par $\operatorname{Tr} A = 2\cos\theta - 1$.

Ex 37: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$ $\operatorname{Tr} A = 2 = 2\cos\theta + 1$

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$

Pour déterminer le signe de θ, on fixe $\vec{n} \in E_1$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, un vecteur $u \in E_1^{\perp}$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on a :
$$\sin\theta = \frac{\det(u, Au, \vec{n})}{\|u\|^2 \|\vec{n}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
D'où $\theta = \frac{\pi}{3}$

A est donc la matrice d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.