160 Endomorphismes remarquables dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie

Cadre : E un R-ev euclidien de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$

I - Endomorphismes adjoints

1) Premières propriétés

[Gri] Thm 1 $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$

f^* est appelé adjoint de f.

Expl $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$
$u \mapsto u^*$ est un anti-automorphisme involutif

Rmq 1 Si M est la matrice de f dans une base orthonormée, alors ${}^tM$ est celle de f^* dans cette base.

Prop 1 $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a : $(fg)^* = g^* f^*$
$\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^*$
$\det f = \det f^*$
$\ker(f)^\perp = \mathrm{Im}(f^*)$
$\mathrm{Im}(f)^\perp = \ker(f^*)$

Prop 2 Soit F un sev stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

2) Adjoints remarquables

Def 1 Si $f = f^*$, f est dit autoadjoint ou symétrique. On note $S(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

Rmq 1 Dans une BON, la matrice d'un endomorphisme autoadjoint est donc symétrique.

Prop 3 $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Si F est un sev stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*

Def 2 Si f et f^* commutent, on dit que f est normal

Def 3 Si $f^* = -f$, f est dit antisymétrique et on note $A(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes

II - Endomorphismes normaux

1) Premières propriétés

[Gou] Prop 6 $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

Lme 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est un sous espace propre de u, $E_\lambda^\perp$ est stable par u et u^*

2) Réduction

[Gri] Thm 2 [DVP 1] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe B, base orthonormée de E, telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$ où $\forall i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall j$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Rmq 2 Les endomorphismes antisymétriques sont normaux

Application 1 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, alors il existe une matrice orthogonale P tq $P^{-1}MP = P^*MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$, $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\forall i$.

Rmq 3 Si f antisymétrique et n impair, $\det f = 0$.

III - Endomorphismes symétriques

1) Définition et propriétés

Def 4 Un endomorphisme symétrique f est positif (resp. défini positif) si $\forall x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle \geq 0$ (resp. > 0)
On note $f \in S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$)

Def 5 De même, $M \in S_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX \geq 0$ (resp. ${}^tXMX = 0 \Rightarrow X = 0$)

On note $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$)

Prop 7 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

$\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$

Prop 8 Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in S_n(\mathbb{R})$ est associée à un produit scalaire

ii) $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

iii) $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$

[MR] p.134

Prop 9 : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$S_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe fermé d'intérieur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

2) Réduction

Thm 3 Soit $f \in S(E)$. Il existe une BON B de vecteurs propres pour f tq : $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i$

Prop 10 (Réduction simultanée) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq. ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP$ diagonale

[X-ens]

Applicat° 2 Le déterminant est strictement log-concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Applicat° 3 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\|A\| = \rho(A)$ où ρ est le rayon spectral.

Prop 11 Le morphisme exp : $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

IV. Endomorphismes orthogonaux

1) Propriétés

[Gou] [Gr-?]

Prop 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $f \in O(E)$

ii) $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

iii) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$

iv) Si B, BON de E, $Mat_B(f) \in O_n(\mathbb{R})$

Prop 13 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est orthogonal ssi f transforme toute base orthonormée en base orthonormée.

Rmq 4 La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est orthogonale.

Prop 14 $O(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E), f f^* = Id_E \}$ est un sous-groupe de $GL(E)$ dont le centre est $\{\lambda Id, \lambda \in \mathbb{U}_n\}$

Prop 15 $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité. [X-ens]

Def 6 Les endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 sont dits directs et l'ensemble de ces endomorphismes est noté $SO(E)$

Prop 16 $SO(E) \lhd O(E)$

$\forall n \geq 3$, $SO_n(\mathbb{R})$ est simple, engendré par les renversements.

[Per]

Thm 4 Soit $f \in O(E)$. Il existe B, BON de E, tq $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_r} & & \\ & & & \varepsilon_1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$

où $\forall i$, $\varepsilon_i = \pm 1$

$\forall j$, $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$

2) En dimension 2 et 3

Prop 17 : $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$

Prop 18 $\forall M \in O_3(\mathbb{R})$, il existe une BON dans laquelle $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

où $\varepsilon = 1$ si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ et $\varepsilon = -1$ sinon (rotations et symétries)

3) Propriétés algébriques et topologiques

[X-ens] **Thm 5** : Décomposition polaire $\boxed{DVP\ 2}$

L'application $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$

$(\Omega, S) \mapsto \Omega S$ est un homéomorphisme

Prop 19 : $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes compacts et des sous variétés de $\mathbb{R}^n$

Prop 20 : $O_n(\mathbb{R})$ admet 2 composantes connexes et $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Prop 21 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$

Prop 22 : Les sous groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et D_n

Ceux de $SO_3(\mathbb{R})$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, A_4, S_4 et A_5

4) Similitudes vectorielles

Déf 7 : On appelle *similitude vectorielle* toute composée d'homothétie de rapport non nul et d'une application orthogonale.

[Mer] **Thm 6** : Une similitude s'écrit de façon unique comme la composée d'une homothétie de rapport $k > 0$ et d'une application orthogonale

Thm 7 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) u est une similitude de rapport k

ii) $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$

iii) u linéaire et $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$

iv) u linéaire et transforme toute base en une base orthogonale dont les vecteurs sont de norme k.

v) $u \in GL(E)$ et $u^* = k^2 u^{-1}$

Ex : Les homothéties

$h_\lambda = \lambda \, id$, $\lambda \neq 0$ est une similitude de rapport $|\lambda|$

Elle est directe si $\lambda > 0$

Si $\lambda < 0$, elle est directe si n pair

En dimension 2, une homothétie est toujours directe

Prop 23 : Soit $u \in GL(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) u est une similitude vectorielle

ii) u conserve les angles géométriques

iii) u conserve l'orthogonalité :

$\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$

Bibliographie :

[Gou] X. Gourdon, Algèbre

[Gri] J. Grifone, Algèbre linéaire

[Per] Perrin, Cours d'algèbre

[Tau] P. Tauvel, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2

[X-ens] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, algèbre 3

[MR] Mercier et Rombaldi, Annales du CAPES externe 2003 à 2011

[AL] Alessandri, Thèmes de géométrie : groupes en situations géométriques

[Ser] : Serre, Les matrices : Théorie et pratique

[Mer] Mercier, Cours de géométrie, Préparation au CAPES et à l'agrégation

1 Décomposition polaire euclidienne ([X-ENS, algèbre 3])

On suppose connu le théorème spectral.

Lemme 1.1

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

Démonstration

⋆ **Existence** : A étant symétrique positive, elle possède toutes ses valeurs propres réelles positives et se diagonalise dans une b.o.n. i.e. il existe $P \in O_n(\mathbb{R}) et$D=diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_,) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $A = PD\,{}^tP$. On pose $\Delta := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. On a alors en posant $P = \Delta\,{}^tP$, que $B^2 = A$ avec B symétrique positive.

⋆ **Unicité** : Si φ désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i, on a alors $\varphi(A) = P\varphi(D)\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = B$, autrement dit B est polynomiale en A.
Soit C une autre matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$, alors C commute avec A (car $C^3 = CA = AC$) et donc avec tout polynôme en A donc avec B. Comme C, B sont symétriques, elles sont simultanément diagonalisables dans une b.o.n., i.e. il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $C = Q\Gamma\,{}^tQ$ et $B = Q\Lambda\,{}^tQ$ avec Γ et Λ diagonales positives. De $C^2 = A = B^2$, on en déduit que $\Lambda^2 = \Gamma^2$ et donc $\Lambda = \Gamma$ par positivité. Ainsi $B = C$.

■

Théorème 1.1 (*Décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$*)

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique oui la forme $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Démonstration

⋆ **Analyse** : SI $A = \Omega S$, alors ${}^tAA = S\,{}^t\Omega\Omega S = S^2$ et S est la racine carrée de la matrice définie positive ${}^tAA$. La matrice Ω est alors donnée par $\Omega = AS^{-1}$ (on a A inversible entraine S inversible). En cas d'existence d'une telle décomposition, on a bien unicité des matrices Ω et S.

⋆ **Synthèse** : La matrice ${}^tAA$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc admet une unique racine carrée symétrique définie positive S. En posant $\Omega := AS^{-1}$, ont $A = \Omega S$. Il reste à vérifier que $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. On a:

$$ {}^t\Omega\Omega = {}^t(S^{-1})({}^tAA)S^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S = \mathrm{I}_n $$

■

Généralisation On va en déduire une généralisation de la décomposition polaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Lemme 1.2

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

Démonstration On est en dimension finie: il suffit de prouver que c'est un fermé borné.

⋆ **Fermé** : On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMM \end{array} \right.$. On a $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ image réciproque d'un fermé par une application continue donc fermé

⋆ **Borné** : $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\| = \mathrm{I}_n$

■

On en déduit de ceci ainsi que de la décomposition polaire sur $GL_n(\mathbb{R})$ la généralisation suivante.

Théorème 1.2

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \Omega S$$

Démonstration Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (à savoir prouver!), toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ décrit comme limite de matrices $A_k \in GL_n(\mathbb{R})$, i.e. $A = \lim A_k$. On utilise le théorème de décomposition polaire sur les A_k: on a $A_k = \Omega_k S_k$ avec $\Omega_k \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_k \in \S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on extrait de la suite $(\Omega_k)_k$ une sous-suite convergente $(\Omega_{\varphi(k)})_k$. Comme $S_{\varphi(k)} = {}^t\Omega_{\varphi(k)} A_{\varphi(k)}$ et par continuité du produit matriciel, on en déduit que $S_{\varphi(k)}$ converge vers une matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (on perd les inégalités larges par passage à la limite, i.e. l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$). Donc $A = \Omega S$ par unicité de la limite. ■

Remarque Si $\mathrm{rg}(A) < n$, on a généralement pas unicité.

Application: Sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$ On montre que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème 1.3

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$. Alors $G = O_n(\mathbb{R})$

Démonstration On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Supposons que G soit un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$.
Toute matrice $A \in G$ s'écrit $A = \Omega S$ avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par stabilité de G par multiplication, on a $S = \Omega^{-1} A \in G$. Par ailleurs, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tPSP$ soit diagonale à termes diagonaux strictement positifs et $D \in G$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de D, avec $\forall i, \lambda_i > 0$. La matrice $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_i^p)$ est aussi dans G.
Or G est compact par hypothèse donc en particulier borné, toutes les suites $(\lambda_i^p)_p$ sont bornées dans $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui implique que $\forall i, \lambda_i = 1$. Donc $D = \mathrm{I}_n$ et $S = \mathrm{I}_n$ et donc $A = \Omega \in O_n(\mathbb{R})$.
Donc $G = O_n(\mathbb{R})$. ■

2 Réduction des endomorphismes normaux ([Gour])

Définition 2.1 (*Endomorphisme normal*)

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme normal si $uu^* = u^*u$.

Notons que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme normal. Alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
Le lemme suivant est la clé de voute de la preuve du théorème de réduction.

Lemme 2.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Si F est un s.e.v. de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^**
2. *Soit E_λ un sous-espace propre de u. On suppose que u est un endomorphisme normal. Alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.*

Démonstration

1. Soit $x \in F$. Par hypothèse, $u(x) \in F$. Ainsi, pour tout $y \in F^\perp$, on a $< u(x), y > = < x, u^*(y) > = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, on a $u^*(y) \in F^\perp$. Donc $F^\perp$ est stable par u^*.
2. Comme u et u^* commutent, E_λ est stable par u donc par le lemme précédent, $E_\lambda^\perp$ est stable par $u^{**} = u$

■

On a besoin également du lemme suivant.

Lemme 2.2

Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles.
Alors dans toute base orthonormée de E, on a

$$\mathrm{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$.

Démonstration On écrit $M := \mathrm{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, où B est une base orthonormale. Nécessairement, $b \neq 0$ car u n'est pas de valeur propre réelle. Comme u est normal, on a $MM^* = M^*M$. Les équations découlant de cette égalité fournissent:

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \text{ et } ab + cd = ac + bd$$

La première égalité entraine que $b = c$ ou $b = -c$.
Si $b = c$, alors M est symétrique, ce qui est impossible puisque u est sans valeur propre réelle. Donc $b = -c$. La deuxième entraîne que $2(a-d)b = 0$ et comme $b \neq 0$, on a $a \neq d$.
Finalement, $c = -b$ et $a = d$. On en déduit que la matrice de u dans B possède bien la forme annoncée.
■

On est à présent en mesure de prouver le théorème de réduction des endomorphismes normaux dans le cas euclidien.

Théorème 2.1 (***Réduction des endomorphismes normaux***)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.
Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u est

$$\mathrm{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, r\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, s\}, \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Démonstration On raisonne par récurrence forte sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$, c'est trivial.
Supposons le résultat vrai pour tout espace euclidien de dimension inférieure à $n-1$ et considérons E un espace euclidien de dimension n.

- ⋆ **Si u possède une valeur propre réelle** : on note $\lambda \in \mathbb{R}$ cette valeur propre. On considère alors $E_\lambda := \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre associé et $F = E_\lambda^\perp$. Ce dernier s.e.v. est stable par u et u^* (d'après le premier lemme). On peut donc considérer les endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$. Comme u et u^* commutent, il en est de même pour $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$.
  Comme $\dim F \leq n-1$, il existe par hypothèse de récurrence une base orthonormée B_2 de F telle que $\mathrm{mat}_{B_2}(u_{|F})$ soit de la forme indiquée. Si B_1 est une base orthonormée de E_λ, étant donné que $E = E_\lambda \oplus F$, dans la base $B := B_1 \cap B_2$, la matrice $\mathrm{mat}_B(u)$ a la forme souhaitée.

- ⋆ **Si u est sans valeurs propres réelles** : Considérons un facteur irréductible Q de degré 2 du polynôme caractéristique, i.e. $\chi_u = QP$ avec $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ où $\alpha^2 - \beta < 0$. On pose alors $N := \ker(Q(u))$.

  Assertion 1 : $N \neq \{0\}$.
  En effet, on peut écrire $Q = (X - \lambda)(X - \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Dès lors λ est une racine de χ_u et donc c'est une valeur propre complexe de u, i.e. $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Dès lors

  $$Q(u) = \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \det(u - \overline{\lambda} \mathrm{Id}_E) = 0$$

  autrement dit $\ker(Q(u)) \neq \{0\}$

  Assertion 2 : N est stable par u et u^*. Cela découle du fait que u et u^* commutent. On peut donc considérer $v := u_{|N}$. Ainsi, $v^* = u^*_{|N}$ et l'endomorphisme $v^*v = (u^*u)_N$ est symétrique réel donc admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Considérons $x \in N \setminus \{0\}$ un vecteur propre (pour v^*v) associé à μ.
  Posons alors $F := \mathrm{Vect}(x, u(x))$.

Assertion 3 : $\dim F = 2$. Comme u n'admet pas de valeur propre réelle, la famille $(x, u(x))$ est libre donc $\dim F = 2$

Assertion 4 : F est stable par u et u^*.

En effet, comme $x \in \ker Q(u)$, on a $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x \in F$.
Il vient de ceci que $F = \text{Vect}(u(x), u^2(x))$ car $\beta \neq 0$. On a

$$u^*(u(x)) = v^*(v(x)) = \mu x \in F$$

Comme u et u^* commutent, on a

$$u^*(u^2(x)) = u(u^*u(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$$

Ceci prouve que F est stable par u^* car $(u(x), u^2(x))$ est une base de F.
Comme $(u_{|F})^* = (u^*)_{|F}$, on a $u_{|F}$ est un endomorphisme normal. Par le deuxième lemme, il existe une base orthonormée B_2 de F dans laquelle

$$\text{mat}_{B_2}(u_{|F}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Comme F est stable par u^*, on a $F^\perp$ stable par $(u^*)^* = u$ et par u^*. Donc $(u_{|F^\perp})^* = (u^*)_{|F^\perp}$, ce qui prouve que $u_{|F^\perp}$ est normal.

Ainsi par hypothèse de récurrence (car $\dim F^\perp = n-2$), il existe une base orthonormée B_1 de $F^\perp$ telle que $\text{mat}_{B_1}(u_{|F^\perp})$ soit de la forme indiquée.
Dans la base $B = B_1 \cup B_2$ (orthonormée) de E, la matrice de u est bien de la forme souhaitée.

■

Remarques Pour E un espace **hermitien** et $u \in \mathcal{L}(E)$, on a les équivalences suivantes:

1. u endomorphisme normal
2. u se diagonalise dans une base orthonormée de E
3. u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormée commune

Attention Ce théorème n'est plus vrai dans le cas où E est seulement euclidien: la matrice de rotation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est normale mais pas diagonalisable. On a des corollaires très intéressants de ce résultats.

⋆ **Réduction des endomorphismes symétriques** On rappelle qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (où E est euclidien) est dit *symétrique* (ou encore *auto-adjoint* si $u^* = u$).

Théorème 2.2 (*Théorème spectral*)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u, et les valeurs propres de f sont réelles.

⋆ **Réduction des matrices antisymétriques** On a le théorème suivant.

Théorème 2.3 ($\mathbb{C}$)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M+M^*=0$. Alors il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1}MU = U^*MU = D$ soit diagonale à coefficients diagonaux imaginaires purs.

Théorème 2.4 ($\mathbb{R}$)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}MP = {}^tPMP = \mathrm{diag}(0,\dots,0,\tau_1,\dots,\tau_s)$$

où les τ_i sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ v_i & 0 \end{pmatrix}$

$\star$ **Réduction des isométries** On en déduit la forme normale des isométries réelles.

Théorème Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie (i.e. $u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$). Alor sil existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u a la forme par blocs

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \epsilon_s & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où pour tout $j \in \{1,\dots,s\}$, on a $\epsilon_j = \pm 1$ et pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, on a $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

Bibliographie

[Gour] X. Gourdon, *Algèbre*, Les maths en tête, Ellipses, 2008

[Grif] J. Grifone, *Algèbre linéaire*,

[Per] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses.

[Tau] P. Tauvel, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre 2*, Masson

[X-ENS, algèbre 3] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas *Oraux X-ENS, algèbre 3*, Cassini

[MRp.231] D-J. Mercier, J-E. Rombaldi, *Annales du CAPES externe de mathématiques 2009 à 2011*, Editions Publibook Universités

[Al] M. Alessandrini, *Thèmes de géométrie: groupes en situations géométriques*, Dunod, 1999

[Ser] D. Serre, *Les matrices: théorie et pratique*, Dunod, 2001

[Mer] D-J. Mercier, *Cours de géométrie, Préparation au capes et à l'agrégation*, Publibook