160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel Euclidien de dimension finie

Cadre : E espace vectoriel Euclidien, muni du produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$, de dimension finie ($\dim E = n$).

I) Adjoint d'un endomorphisme.

1) Définitions et propriétés de l'adjoint.

Prop-Def 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de u tel que
$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$
Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée alors ${}^t\mathrm{Mat}_{e_i}(u) = \mathrm{Mat}_{e_i}(u^*)$

App 2 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si ${}^tA.A = 0$ alors $A = 0$.

Prop 3 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

(i) $(u^*)^* = u$, $(id_E)^* = id_E$

(ii) $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$.

(iii) $(\ker u)^\perp = \mathrm{Im}\, u^*$, $(\mathrm{Im}\, u)^\perp = \ker u^*$.

(iv) $\mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{rg}\, u$, $\det(u^*) = \det(u)$.

(v) Si $F \subset E$ est un sous espace stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.

2) Définitions d'endomorphismes remarquables.

Def 4 Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint (ou symétrique) si $u^* = u$. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Rem 5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \in S(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$.

Ex 6 $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ ${}^tA.A$ est symétrique. Son endomorphisme canoniquement associé est auto-adjoint.

Def 7 Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal lorsque $\forall x, y \in E$ $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Rem 8 $u \in O(E)$ si et seulement si $u^* \circ u = id_E$. (ou $u \circ u^* = id_E$)

Def 9 Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Ex 10 Les endomorphismes orthogonaux et auto-adjoints sont normaux.

C-ex 11 Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2+b^2 \neq 1 \\ b \neq 0 \end{cases}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ sont normales mais ni symétriques ni orthogonales.

II) Endomorphismes auto-adjoints.

1) Quelques propriétés.

Def 12 On dit que $u \in S(E)$ est positif (resp défini positif) si $\forall x \in E$ $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ (resp $\langle u(x), x \rangle > 0$ avec $x \neq 0$) On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

Prop 13 Soit $u \in S(E)$, $u \in S^+(E)$ (resp $u \in S^{++}(E)$) si et seulement si toutes les valeurs propres de u sont positives (resp strictement positives).

2) Réduction des endomorphismes auto-adjoints.

Thm 14 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Il existe une base orthonormée de vecteurs propre de u.

Rem 15 Dans le cas hermitien, les valeurs propres de u sont réelles.

Coro 16 Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $C \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tCMC = D$ (où D est une matrice diagonale).

App 17 Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M = R^2$.

Coro 18 Soit ϕ une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale.

Coro 19 Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tCMC = I_n$ et ${}^tCNC = D$.

App 20 Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

III) Endomorphismes normaux

Prop 21 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

Prop 22 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et soit E_λ un sous-espace propre de u, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Lemme 23 Supposons E de dimension 2 et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal ne possédant pas de valeur propre réelle.

Alors dans toute base orthonormée de E, la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0$$

Thm 24 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

DEV 1

Rem 25 Si $u \in S(E)$, on retrouve le théorème spectral (Thm 14). Si $u \in O(E)$, le théorème s'applique.

Ex 26 Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, elle est en particulier normale, il existe alors une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $\tau_j = \begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

IV) Endomorphismes orthogonaux

1) Quelques propriétés

Prop 27 Soit $u \in O(E)$, on a :

(i) Les valeurs propre de u sont 1 ou -1

(ii) $|\det u| = 1$, donc u est bijective

→ Si $\det u = 1$, on dit que u est orthogonal direct, on note $SO(E) = \{u \in O(E),\ \det u = 1\}$.

→ Si $\det u = -1$, on dit que u est orthogonal indirect.

Prop 28 $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. $SO(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$.

Prop 29 $u \in O(E)$ ssi $u \in \mathcal{L}(E)$ transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

2) Lien avec la géométrie

Def - Prop 30 Soit $u \in O(E)$ tel que $u^2 = id_E$.
Alors il existe deux sous-espace E^+ et E^- de E tels que :

(i) $u_{|E^+} = id_{E^+}$, $u_{|E^-} = -id_{E^-}$

(ii) $E = E^+ \overset{\perp}{\oplus} E^-$.

Ainsi il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

On appelle dans ce cas u une symétrie orthogonale.
Si $\dim E^- = 1$, on dit que u est une reflexion orthogonale.
Si $\dim E^- = 2$, on dit que u est ~~un~~ renversement orthogonal.

Thm 31 Le centre de $O(E)$ est $\{-Id, Id\}$, le centre de $SO(E)$ est $\{Id\}$

Thm 32 $O(E)$ est engendré par les reflexions. $SO(E)$ est engendré par les ~~retournements~~ renversements

Lemme 33 Soient V_1, V_2 deux sous-espaces de E de même dimension, alors il existe $u \in SO(E)$ tel que $u(V_1) = V_2$

Prop 34 Soient $s_1, s_2 \in O(E)$ deux symétries telles que les ensembles E^- de la Prop 30 soient de même dimension, alors $\exists u \in SO(E)$ tq $s_1 = u s_2 u^{-1}$

3) Etude en dimension 2 et 3

Prop 35 Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$,

(i) Si $A \in SO_2(\mathbb{R})$, $\exists \theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(ii) Si $A \notin SO_2(\mathbb{R})$, $\exists \theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Prop 36 Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, alors A est semblable à une matrice de la forme

$$A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} , \ \theta \in [0, 2\pi[, \ \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

→ Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, A représente une rotation autour de l'axe E_1 d'angle θ, où $\mathrm{Tr} A = 2\cos\theta + 1$

→ Si $A \notin SO_3(\mathbb{R})$ A représent une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$
L'angle de rotation est θ, où $\mathrm{Tr} A = 2\cos\theta - 1$

Ex 37 Si $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, A représente une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ par rapport à $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Topologie du groupe orthogonal

Prop 38 $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts

Prop 39 $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$

Thm 40 $SO_3(\mathbb{R})$ est simple **DEV 2**

5) Applications

Prop 41 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe un couple (O, S) tel que $A = OS$, $O \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$, le couple (O, S) est unique

Prop 42 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $\|A\|_2 = \sup_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$ et $\rho(M) = \sup\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } M\}$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\|_2^2 = \rho({}^tAA)$$