160

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (de dimension finie).

<u>Cadre</u>: On fixe E un espace euclidien. On identifiera $u \in \mathcal{L}(E)$ et sa matrice dans la base canonique.

I. Adjoint d'un endomorphisme

<u>Def 1</u>: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

<u>Prop 2</u>: Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tMat_{\mathcal{B}}(u)$.

<u>Prop 3</u>: L'application $u \mapsto u^*$ est une involution linéaire.

<u>Prop 4</u>: Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

<u>Prop 5</u>: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\ker(u^*) = Im(u)^\perp$, $Im(u^*) = \ker(u)^\perp$. En particulier, $u \mapsto u^*$ conserve le rang.

II. Endomorphismes orthogonaux

<u>Def 6</u>: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est orthogonal si $uu^* = Id_E$.

<u>Remarque 7</u>: On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^tM = I_n$, où $n = \dim(E)$.

<u>Notation 8</u>: On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

<u>Exemple 9</u>: La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

<u>Proposition 10</u>: Il y a équivalence entre :

(i) u est orthogonal

(ii) u conserve la norme

(iii) u conserve le produit scalaire

(iv) u est inversible et $u^* = u^{-1}$

(v) u envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.

<u>Prop 11</u>: Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, où $u \in \mathcal{O}(E)$.

<u>Théorème 12 (Réduction)</u>: Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

où $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

<u>Remarque 13</u>: Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP$ est de la forme ci-dessus.

<u>Proposition 13</u>: Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Les valeurs propres (réelles) de u sont ± 1.
2. $|\det(u)| = 1$.

<u>Définition 14</u>: Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. On dit que u est une isométrie directe si $\det(u) = 1$, indirecte si $\det(u) = -1$.

<u>Notation 15</u>: On note $S\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries directes, $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de leurs matrices dans une base orthonormée.

<u>Application 16</u>:
- Pour $n = 2$, les isométries directes du plan sont les rotations d'angle θ du plan, et les isométries indirectes sont des symétries par rapport à des droites.
- Pour $n = 3$, les isométries du plan sont les rotations d'angle θ autour d'un axe.

Prop 17 : $SO_n(\mathbb{R})$ est commutatif si et seulement si $n=2$.

III. Endomorphismes auto-adjoints

Def 18 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est auto-adjoint si $u = u^*$. En termes matriciels, cela se réécrit ${}^t Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On dit que u est symétrique.

Notation 19 : On notera $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Exemple 20 : La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ est symétrique.

Définition 21 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive (resp définie positive) si pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a ${}^tXAX \geq 0$ (resp ${}^tXAX > 0$).

Notation 22 : On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices positives, et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives.

Exemple 23 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2 alors sa matrice hessienne $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j} \in S_n(\mathbb{R})$. Si de plus elle appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$, et si $\vec{grad}(f)(x) = 0$, alors x est un minimum local de f.

Exemple 24 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r qui admettent un moment d'ordre 2, alors leur matrice de covariance est symétrique.

Proposition 25 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$). Alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).

Théorème 26 (Théorème spectral) : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice P orthogonale telle que ${}^tPDP = A$, où D est diagonale réelle.

Exemple 27 : La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, de valeurs propres -1 et 1, et $M = PDP^{-1}$ où $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 28 (Racine carrée) : Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M = A^2$. Si de plus $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV. Endomorphismes normaux

Définition 29 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u^*u = uu^*$.

Remarque 30 : Les endomorphismes orthogonaux et les endomorphismes symétriques sont normaux.

Exemple 31 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est normale, mais ni symétrique ni orthogonale.

Lemme 32 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est un sev propre de u, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Lemme 33 : Si E est de dimension 2, et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal n'ayant pas de valeurs propres réelles, alors dans toute base $\mathcal{B}'$ orthonormée de E, on a $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Théorème 32 : Soit u normal. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Remarque 33 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normale. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP$ ait la forme du théorème.

Application 34 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, i.e telle que ${}^tM = -M$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 0 & & \\ 0 & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$.

Proposition 35 (Décomposition polaire). Soit M inversible. Alors il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

Application 36 : Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ compact qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est égale à $O_n(\mathbb{R})$

V. Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Def 37 : Soit F un sev de E. Le projecteur orthogonal p_F sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Def 38 : Soit F un sev de E. La symétrie orthogonale s_F par rapport à F est la symétrie sur F par rapport à $F^\perp$.

Proposition 39 : On note m la dimension de F. Dans une base adaptée, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{pmatrix}$.

Def 40 : Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de codimension 1 (resp. 2) est dite réflexion (resp retournement).

Remarque 41 : Un retournement est une isométrie directe, et une réflexion est une isométrie indirecte.

Exemple 42 : Soit H un hyperplan, e un vecteur directeur de $H^\perp$ de norme 1. Alors $\forall x \in E$,
$p_D(x) = \langle x, e\rangle e \quad p_H(x) = x - \langle x, e\rangle e$
$s_D(x) = -x + 2\langle x, e\rangle e \quad s_H(x) = -s_D(x)$

Proposition 43 : Le produit des symétries orthogonales par rapport à deux sous-espaces orthogonaux F_1 et F_2 de E est commutatif. C'est la symétrie orthogonale par rapport à $(F_1 + F_2)^\perp$.

Remarque 44 : La réciproque est vraie : la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F de E peut être considérée comme le produit commutatif des symétries orthogonales par rapport à 2 sous-espaces orthogonaux de E contenus dans $F^\perp$. L'un peut être choisi arbitrairement, et l'autre est alors uniquement déterminé.

Théorème 45 : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Références :
- Gourdon Algèbre
- Avez, calcul différentiel
- Objectif Agreg
- Ramis Deschamps Odoux
- Chavet, L'essentiel du programme de l'agreg