161

135

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

E, F seront des espaces affines euclidiens de dim n, de directions $\vec{E}$ et $\vec{F}$ et munis du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

I°/ Le groupe des isométries

1 - Présentation du groupe

Déf: E, F deux espaces affines euclidiens, $f: E \to F$ est une isométrie si $\forall M, N \in E$, $\|\vec{MN}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|$.

Thm: f est une isométrie $\Leftrightarrow$ f est affine et $\vec{f} \in O(\vec{E})$.
En particulier, une isométrie est toujours bijective.

Ex: Les translations, les rotations vectorielles et les symétries orthogonales sont des isométries.

Prop: * $Is(E) = \{$isométries affines de E$\}$ et $O(\vec{E})$ sont des groupes pour la composition des applications.
* $Is^+(E) = \{f \in Is(E), \vec{f} \in O^+(\vec{E})\}$ est un sous-groupe de $Is(E)$ appelé le groupe des déplacements.
* $Is^-(E) = \{f \in Is(E), \vec{f} \in O^-(\vec{E})\}$ " "
" ~~le groupe~~ l'ensemble des antidéplacements.

Illustration: cf ANNEXE 1

Rq: On a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \vec{E} \xrightarrow{i} Is(E) \xrightarrow{p} O(\vec{E}) \longrightarrow 1$$
$$\vec{u} \longmapsto t_{\vec{u}}$$
$$f \longmapsto \vec{f}$$

p surjectif, i injectif et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(i)$.

2 - Détermination des isométries, générateurs

THM: [Forme réduite]
Soit $f \in Isom(E)$. Il existe une isométrie g et une translation $t_{\vec{v}}$ de E telles que :

$\to$ l'espace F des points fixes de g n'est pas vide
$\to$ le vecteur $\vec{v}$ de la translation est dans la direction $\vec{F}$ de ce sous-espace
$\to$ on peut écrire $f = t_{\vec{v}} \circ g$

De plus, le couple $(\vec{v}, g)$ est unique, $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$ et $\vec{F} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_E)$.

Thm: Soit $f \in Is(E)$. Alors f est déterminée par les images de n+1 points affinement indépendants.

Déf: Une réflexion de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Thm: Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien de dim n. Toute isométrie de $\vec{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leq n$.

Thm: Si cette fois E est affine euclidien de dim n, toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leq n+1$.

DVPT n°1

THM: [Générateurs de Is(E)]
Is(E) est engendré par ~~les translations~~, les symétries ~~et les rotations~~.

Thm: Si $s \in Is^-(E)$, l'application $Is^+(E) \longrightarrow Is^-(E)$, $f \longmapsto s \circ f$ est une bijection.

II°/ Classification des isométries du plan et de l'espace

1 - Réduction dans $O(\vec{E})$

Thm: Soit $f \in Is(\vec{E})$. Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$ tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & (0) & & & & & R_{\theta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

2 - Isométries en dimension 2

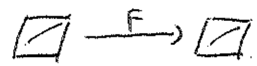
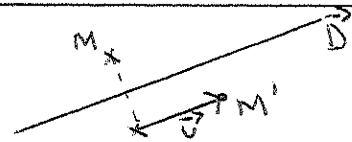
Déf: Une rotation affine de E est une application affine de partie linéaire une rotation vectorielle et possédant au moins un point fixe.

Déf: On appelle symétrie glissée toute isométrie de la forme $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\vec{D}}$ où $s_{\vec{D}}$ est une symétrie p/r à $\vec{D}$ et $\vec{u} \in \vec{D}$.

Classification vectorielle: Les isométries vectorielles sont:

- -> l'identité : espace fixe de dim = 2
- -> les rotations : dim = 0 $\Big\} O^+(\vec{E})$
- -> les réflexions orthogonales / directe : espace fixe de dim = 1 $\} O^-(\vec{E})$

Classification affine: Grâce au théorème de forme réduite, on en déduit les isométries pour $\vec{E}$ affine:

Ensemble invariant $\vec{F}$	Nature de l'isométrie	Visualisation
Plan (dim = 2)	· Identité	
Droite (dim = 1)	· Réflexion	
Un point (dim = 0)	· Rotation ($\neq$ identité)	
ϕ	· Translation · Symétrie glissée	

$Is^-(E)$

$Is^+(E)$

3 - Isométries en dimension 3

Du théorème de réduction dans $O(\vec{E})$, on en déduit qu'il existe une b.o.n de $\vec{E}$ tq la matrice soit de la forme:

-> I_3 pour l'identité, $\dim(\vec{F}) = 3$ $\} O^+(\vec{E})$

-> rotation : $\begin{pmatrix} 1 & 0\ 0 \\ 0 & R_\theta \\ 0 & \end{pmatrix}$, $\theta \neq 0 [2\pi]$: $\dim(\vec{F}) = 1$ axe de la rotation $\} O^+(\vec{E})$

-> réflexion p/r plan : $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$: $\dim(\vec{F}) = 2$

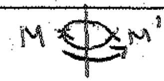
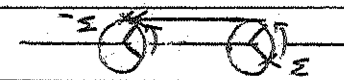
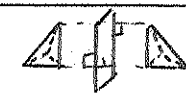
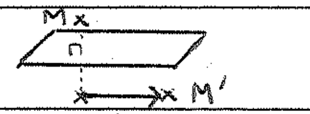
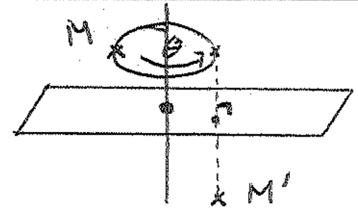
-> anti-rotation : $\begin{pmatrix} -1 & 0\ 0 \\ 0 & R_\theta \\ 0 & \end{pmatrix}$, $\theta \neq 0 [2\pi]$: $\dim(\vec{F}) = 0$ $\Big\} O^-(\vec{E})$

Déf: On appelle vissage toute isométrie de la forme $f = t_{\vec{u}} \circ r_{\vec{D}}$ où $r_{\vec{D}}$ est une rotation d'axe $\vec{D}$ et $\vec{u} \parallel \vec{D}$.

Rq: $f = t_{\vec{u}} \circ r_{\vec{D}} = r_{\vec{D}} \circ t_{\vec{u}}$.

Déf: On appelle rotation-symétrie la composée d'une rotation $r_{\vec{D}}$ d'axe $\vec{D}$ et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan P, avec $\vec{D} \perp P$.
Nous l'appelerons encore ici anti-rotation.

classification affines (cf ANNEXE pour plus de clarté)

Ensemble invariant $\vec{F}$	Nature de l'isométrie	Visualisation
l'espace entier $\mathbb{R}^3$ (dim = 3)	· identité	
pas de points fixes	· translation	
axe de la rotation (dim = 1)	· rotation	
pas de points fixes	· vissage	
plan de symétrie (dim = 2)	· réflexion hyperplane	
pas de points fixes	· symétrie glissée	
centre de la rotation situé sur le plan de symétrie (dim = 0)	· anti-rotation	

$Is^+(E)$

$Is^-(E)$

III°/ Isométries conservant une partie finie du plan

1 – Définition, généralités

Déf : Soit $\mathcal{P} \subset E$. On dit qu'une isométrie f de $\mathcal{P}$ dans E conserve la partie $\mathcal{P}$ ssi $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Thm : Toute isométrie laissant une partie finie $\mathcal{P} = \{A_0, \dots, A_n\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre O de $A_0, \dots, A_n$

2 – Polygônes

Déf : On considère n points $A_0, \dots, A_{n-1}$ du plan. On note commodément $A_k = A_m$ si $k \equiv m \pmod n$, et on suppose que trois points consécutifs A_i, A_{i+1}, A_{i+2} quelconques ne sont pas alignés.
On appelle polygône $\mathcal{P}$ de sommets $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ la famille formée de tous les segments $[A_0A_1], \dots, [A_{n-2}A_{n-1}], [A_{n-1}A_0]$, noté $\mathcal{P} = A_0A_1 \cdots A_{n-1}$.
Les $[A_iA_{i+1}]$ sont les arêtes du polygône et $\mathcal{S} = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ ses sommets.

Prop : $Is(\mathcal{P}) \subset Is(\mathcal{S})$.

$\mathcal{P}$: Partie de E	$Is(\mathcal{P})$	$Is^+(\mathcal{P})$
Triangle qcq	$\{Id\}$	$\{Id\}$
Triangle isocèle (en A)	$\{Id, s_{\Delta_A}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{Id\}$
Triangle équilatéral	$\{Id, r_{2\pi/3}, r_{4\pi/3}, s_{\Delta_A}, s_{\Delta_B}, s_{\Delta_C}\} \simeq S_3$	$\{Id, r_{\frac{2\pi}{3}}, r_{\frac{4\pi}{3}}\} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
parallélogramme	$\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
losange	$\{Id, s_0, s_{AC}, s_{BD}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	"
Rectangle	$\{Id, s_0, s_{\Delta_{AB}}, s_{\Delta_{BC}}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	"
Carré	$\{Id, r, r^2, r^3, s_{AC}, s_{BD}, s_{\Delta_{AB}}, s_{\Delta_{BC}}\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{Id, r, r^2, r^3\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Thm : Soient $n \geq 3$ et $P_n = A_0A_1 \cdots A_{n-1}$ un polygône à n sommets distincts deux à deux. On a équivalence entre :
i) P_n est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et $A_kA_{k+1} = A_0A_1$, $\forall k$
ii) il existe une rotation r tq $r(A_k) = A_{k+1}$, $\forall k$
Si P_n vérifie une des deux relations ci-dessus, on l'appelle "polygône régulier". (cf ANNEXE)

$\mathcal{P}_n$ est désormais un polygône régulier à n côtés.

Thm : $Is^+(\mathcal{P}_n) = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

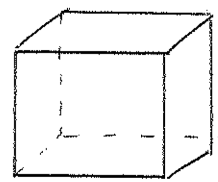
Déf : $Is(\mathcal{P}_n)$ est appelé le groupe diédral d'indice n, noté D_n

Thm : Le groupe diédral D_n d'indice n est un groupe fini d'ordre $2n$, engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.

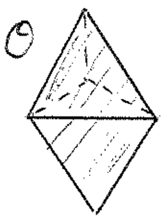
3 – Les polyèdres réguliers

Motivations : création de dés, vision des groupes ...

Le tétraèdre :  $\mathcal{T}$ $\quad Is(\mathcal{T}) \simeq S_4$ [DVPT n° 2]

Le cube : $\mathcal{C}$ 

$Is(\mathcal{C}) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$Is^+(\mathcal{C}) \simeq S_4$

L'octaèdre : $\mathcal{O}$ 

$Is(\mathcal{O}) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$Is^+(\mathcal{O}) \simeq S_4$

Le dodécaèdre : $(\mathcal{D})$
L'isocaèdre $(\mathcal{J})$

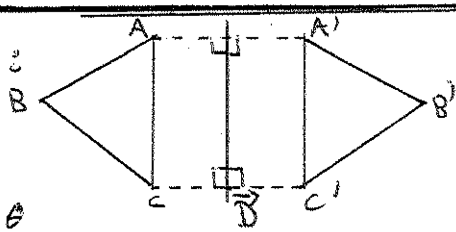
$Is(\mathcal{D}) \simeq Is(\mathcal{J}) \simeq S_5$
$Is^+(\mathcal{D}) \simeq Is^+(\mathcal{J}) \simeq A_5$

↳ Δ preuve de l'existence difficile

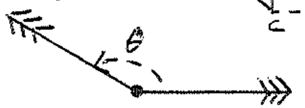
ANNEXE :

En dim 2 :

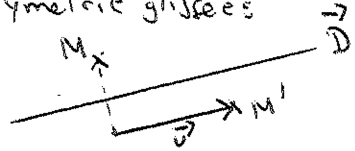
réflexion :



rotation :

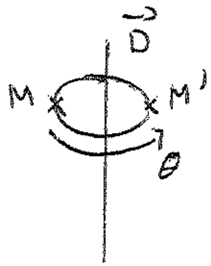


symétrie glissée :

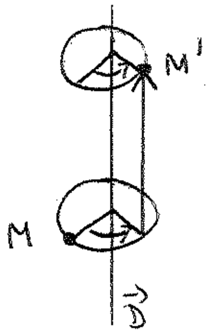


En dim 3 :

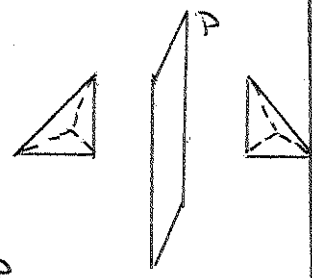
rotation :



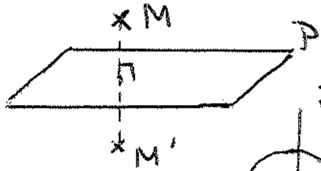
vissage :



réflexion hyperplane :

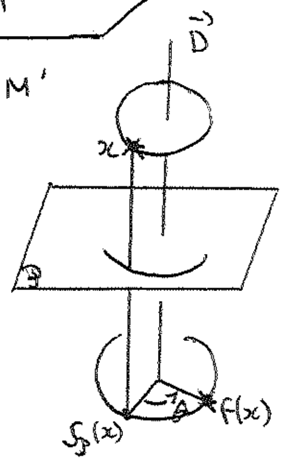


symétrie glissée :



anti-rotation :

$F = r_\theta \circ s_P$

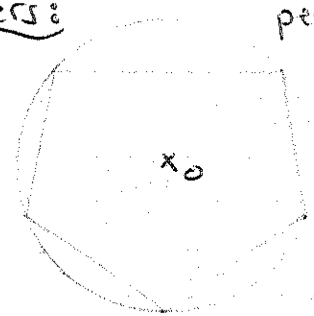


Références :

- Michèle AUDIN : "Géométrie"
- Dany-Jack MERCIER : "Cours de géométrie"
- Daniel PERRIN : "Cours d'algèbre"

Polygônes réguliers :

pentagone régulier convexe



pentagone régulier croisé

Hexagone régulier convexe