161. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3 [Mer]

<u>Cadre</u> $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension n. On note : $\langle , \rangle$ le produit scalaire sur E et $\| \cdot \|$ la norme associée.

I. Définitions et premières propriétés.

A. Définitions.

Def 1. $(\mathcal{F}, F)$ un espace affine euclidien. $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe une application linéaire $f : E \to F$ telle que :
$$\forall M, N \in \mathcal{E} : \overrightarrow{\phi(M)\phi(N)} = f(\overrightarrow{MN})$$
- f est la partie linéaire associée à ϕ.
- On note $GA(\mathcal{E})$ le groupe affine de $\mathcal{E}$.

Def 2. Isométries :
- i) <u>vectorielles</u> : Applications linéaires conservant la norme. On note $O(E)$ le groupe des isométries de E.
- ii) <u>Affines</u> : Applications conservant les distances. On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$.

[Com] **Prop 3.** $(\mathcal{E}', E')$ espace affine euclidien de dimension n, $(A, \vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. Si $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine, de partie linéaire f, on a l'équivalence :

i) ϕ est une isométrie $\Leftrightarrow$ ii) f est orthogonale
$\Leftrightarrow$ iii) $(\phi(A), f(\vec{e}_1'), \dots, f(\vec{e}_n'))$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$

Exemples 4. i) Les translations sont des isométries (l'application linéaire associée l'identité).

ii) **Def** Symétries orthogonales :
- <u>vectorielle</u> : $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, $G = F^{\perp}$. s_F est définie par : $s_F(x) = x$, $x \in F$; $s_F(x) = -x$ si $x \in G$.
- <u>Affine</u> : $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, $M \in \mathcal{E}$. $M' = \sigma_{\mathcal{F}}(M)$ est défini par $\overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM})$ où $O \in \mathcal{F}$ quelconque.

Ce sont des isométries. (Cf Annexe)

Théorème 5. $Is(\mathcal{E})$ muni de la composition des applications est un groupe.

B. Le groupe des isométries.

[Lad] **Prop 6.** i) $\varphi : Is(\mathcal{E}) \to O(E)$, $\phi \mapsto f$ est un morphisme de groupe surjectif. $\ker \varphi = \{\text{translations}\}$.

ii) Soit $O \in \mathcal{E}$. $Is(\mathcal{E}, O) = \{\phi \in Is(\mathcal{E}) : \phi(O) = O\}$.
$\tilde{\varphi} : Is(\mathcal{E}, O) \to O(E)$, $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme.

Def 7. Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

[Au] **Prop 8.** Toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions avec : $p \leq n$. DVP 1

Def 9. i) $SO(E) = \{u \in O(E) : \det(u) = +1\}$

ii) Un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$.

Prop 10. Si $n \geq 3$, les retournements engendrent $SO(E)$.

Application 11. $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

Prop 12. Toute isométrie affine de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions avec $p \leq n+1$. DVP 2

[Ber] **Lemme 13.** Dans un plan euclidien, soient $\mathcal{D}$ une droite et a, b deux points situés dans le même demi-plan ouvert associé à $\mathcal{D}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathcal{D}$ minimisant $an + bn$. De plus, (nA) et (nB) sont symétriques par rapport à la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par n. (Cf Annexe)

[Aud] **Def 14.** i) Le déterminant d'une application affine est celui de l'application linéaire associée.

ii) Un déplacement est une isométrie affine de déterminant positif. $Isom^+(\mathcal{E})$ est l'ensemble des déplacements de $\mathcal{E}$.
$Isom^-(\mathcal{E}) = Is(\mathcal{E}) \setminus Isom^+(\mathcal{E})$: Antidéplacements de $\mathcal{E}$.

Rque :
- $Isom^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$.
- Les déplacements sont les isométries qui préservent les orientations de l'espace.

Prop 15. Une isométrie est un déplacement si et seulement si le nombre de réflexions qui intervient dans sa décomposition est pair.

161. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

Exemple 16 i) Une translation est un déplacement.
ii) Une réflexion est un anti-déplacement.

C. Détermination d'une isométrie

[Mer] **Théorème 17** Une isométrie affine de $\mathcal{E}$ est déterminée par les images de $n+1$ points affinement indépendants.

Théorème 18 Soit $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. On considère $(B_0, \dots, B_n)$ $n+1$ points de $\mathcal{E}$ tels que : $\forall i,j$, $B_iB_j = A_iA_j$. Alors il existe une unique isométrie transformant $(A_0, \dots, A_n)$ en $(B_0, \dots, B_n)$. De plus, $(B_0, \dots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

Application 19 Triangles isométriques.

Déf. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits isométriques (dans cet ordre) s'il existe une isométrie ϕ telle que : $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$.

Théorème Les triangles ABC et $A'B'C'$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}$ sont isométriques si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :
i) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$; ii) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\hat{B} = \hat{B}'$
iii) $AB = A'B'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$.

Contre-exemple Deux triangles peuvent avoir trois éléments égaux sans être isométriques. (Cf Annexe)

II. Forme réduite et applications.

A. Le théorème fondamental. [Com]

Théorème 20 Toute isométrie affine ϕ de $\mathcal{E}$ s'écrit de façon unique : $\phi = t_{\vec{u}} \circ g$ où :
i) g est une isométrie admettant un point fixe.
ii) $\vec{u} \in \ker(f - Id_E)$, f partie linéaire de ϕ, $t_{\vec{u}}$ translation de vecteur $\vec{u}$.
iii) $t_{\vec{u}}$ et g commutent.

Rque. Comme g a un point fixe, d'après prop 6 son étude se ramène à sa partie linéaire qui est égale à celle de ϕ.

Application 21 Soit $\phi \in Is(\mathcal{E})$. Soit $n \geq 2$. Si f^n admet un point fixe, alors f admet un point fixe.

B. Classification des isométries en dimensions 2 et 3. [Com] [Mer]

On utilise le th. 20 et :

Théorème 22 Réduction des éléments de $O(E)$.
Soit $f \in O(E)$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & R_{\theta_1} & \\ (0) & & & & & & \ddots \ R_{\theta_p} \end{pmatrix} \quad \text{où } R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

→ **Isométries du Plan** : $\dim E = 2$

Déf 23 i) Une rotation affine de $\mathcal{E}$ est une application affine de partie linéaire une rotation vectorielle et possédant au moins un point invariant.
ii) Une réflexion glissée est une isométrie de la forme : $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$ où s_D est une réflexion par rapport à une droite D et $\vec{u}$ est colinéaire à D.

Classification vectorielle : Les isométries vectorielles sont :
+ Id_E } déplacements
+ Les rotations
+ Les réflexions } Anti-déplacement !

Classification affine

Ensemble invariant	Nature
Plan	Identité $\in Is^+(\mathcal{E})$
Droite	Réflexion $\in Is^-(\mathcal{E})$
Point	Rotation $\in Is^+(\mathcal{E})$
$\emptyset$	Translation $\in Is^+(\mathcal{E})$ ou Symétrie glissée $\in Is^-(\mathcal{E})$

Figures en annexe.

→ **Isométries de l'espace** : $\dim \mathcal{E} = 3$

Déf 24 i) Un vissage est une isométrie de la forme : $\phi = t_{\vec{u}} \circ r_D$ où r_D est une rotation d'axe D et $\vec{u}$ est colinéaire à D.
ii) Une symétrie-rotation est une isométrie de la forme : $\phi = r_D \circ s_P$ où r est une rotation d'axe D et s la réflexion par rapport au plan $P \perp D$.

161. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

Classification vectorielle sous forme matricielle

+ I_3
+ Rotation : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, $\theta \neq 0\,(2\pi)$ } Déplacements
+ Réflexion : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
+ Symétrie-rotation : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, $\theta \neq 0\,(2\pi)$ } Antidéplacements

Classification affine

Ensemble invariant	Nature
Espace	Identité $\in Is^+(\mathcal{E})$
Plan	Réflexion $\in Is^-(\mathcal{E})$
Droite	Rotation $\in Is^+(\mathcal{E})$
Point	Symétrie-rotation $\in Is^-(\mathcal{E})$
$\emptyset$	Translation, vissage } $\in Is^+(\mathcal{E})$; Réflexion glissée } $\in Is^-(\mathcal{E})$

Figures en annexe

III. Isométries conservant une partie [Her]

A. Généralités

Déf 25 Soit P une partie de $\mathcal{E}$. Une isométrie affine laisse globalement invariante P si : $\phi(P) = P$ (*)

On note $Is(P)$ l'ensemble des applications affines vérifiant (*).

Théorème 26 $(Is(P), \circ)$ est un groupe, $Is^+(P)$ est un sous-groupe de $Is(P)$.

Théorème 27 Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_1, \dots, A_n\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre des $(A_i)_{1\le i\le n}$.

B. Polygones

Théorème 28 Si P est une partie finie du plan de cardinal $n \geq 2$, alors : $|Is^+(P)| \leq n$ et $|Is(P)| \leq 2n$.

Déf 29 Soient $A_0, \dots, A_{n-1}$ n points du plan. On note $A_k = A_m$ si $k \equiv m\,[n]$ et on suppose que trois points consécutifs A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ne sont pas alignés. On appelle polygone de sommets $(A_i)_{0\le i\le n-1}$ la famille formée de tous les segments $[A_0A_1], \dots, [A_{n-1}A_0]$ notée : $P = A_0A_1 \dots A_{n-1}$.

Prop. 30 $Is(P) \subset Is(S)$.

Exemples 31 i) Triangle non isocèle : $Is(T) = \{Id\}$

ii) Parallélogramme : $Is(P) = Is^+(P) = \{Id, S_O\}$ où O est l'isobarycentre des sommets et S_O la symétrie par rapport à O.

Théorème 32 $n \geq 3$. $P_n = A_0 \dots A_{n-1}$ un polygone. Il y a équivalence entre :

i) P_n est inscrit dans un cercle C et $A_kA_{k+1} = A_0A_1$ pour tout k.

ii) Il existe une rotation telle que : $\forall k \quad r(A_k) = A_{k+1}$

Si l'une des deux conditions est vérifiée P_n est un polygone régulier.

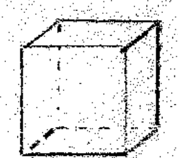
Théorème 33 Si P_n est régulier : $Is^+(P_n) = \{Id, r, \dots, r^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où r est une rotation.

Théorème 34 $Is(P_n) = D_n$: Groupe diédral d'ordre n engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.

Exemple 35 Le groupe du carré : $D_4 = \langle r_{\pi/2}, s \rangle$

C. En dimension 3

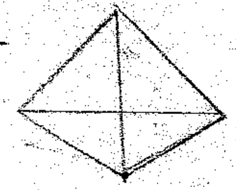
Le cube

C 

- $Is^+(C) \simeq S_4$
- $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

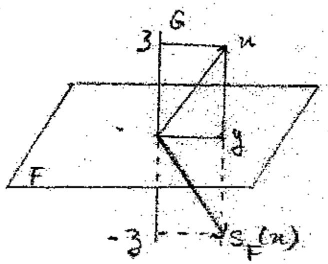
DVP 2

Le tétraèdre régulier

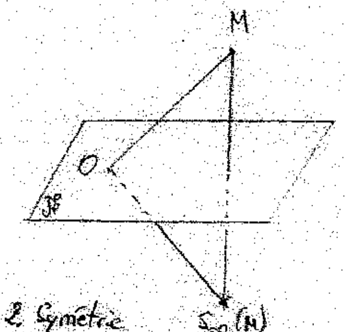
T 

- $Is(T) \simeq S_4$

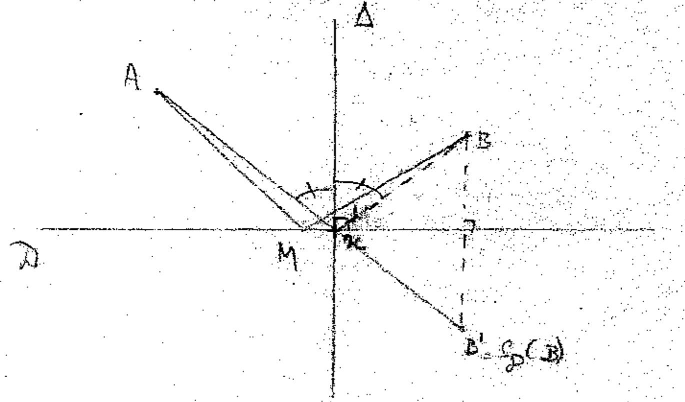
Annexe



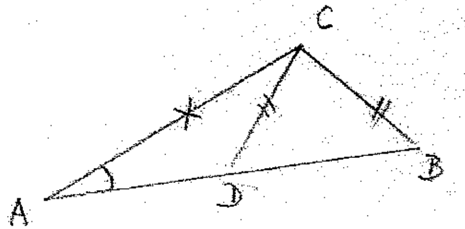
1. Symétrie orthogonale vectorielle



2. Symétrie orthogonale affine



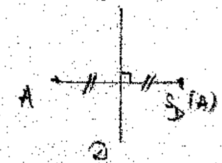
3. Lemme 13



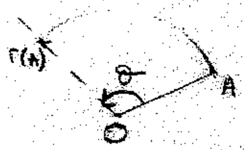
4. Application 19 : Triangles non isométriques : ACD et ACB

Isométries

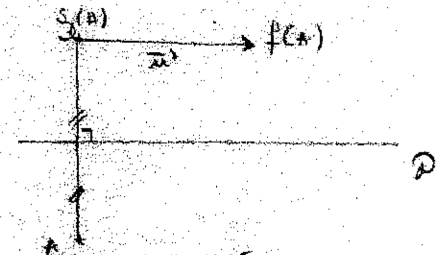
→ Du plan :



Réflexion par rapport à la droite D

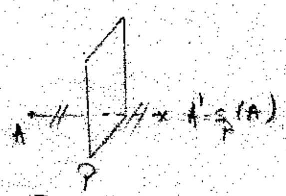


Rotation de centre O et d'angle θ

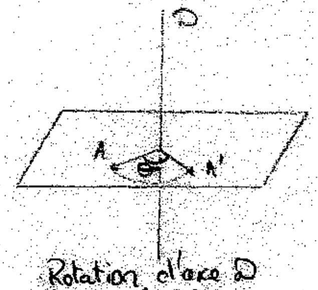


Symétrie glissée : $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$

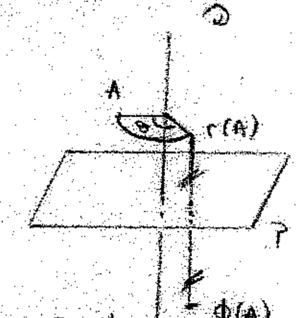
→ De l'espace :



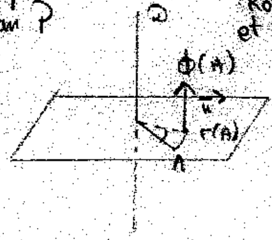
Réflexion par rapport au Plan P



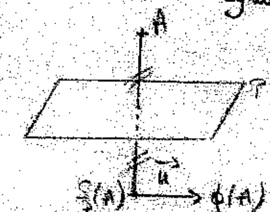
Rotation d'axe D et d'angle θ.



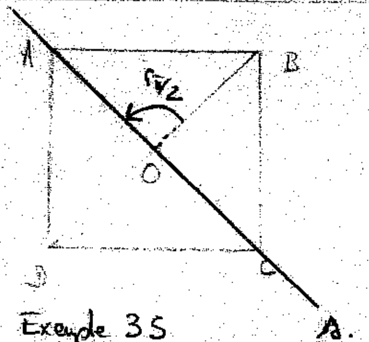
Symétrie rotation : $\phi = r_D \circ s_P$



Vissage : $\phi = r_D \circ t_{\vec{u}}$



Réflexion glissée : $\phi = t_{\vec{u}} \circ s_P$



Exemple 35

Références

- [Mer] : Cours de Géométrie, Mercier
- [Com] : Algèbre et géométrie, Combes
- [Au] : Géométrie, Audin.
- ([Ber] : Géométrie, Berger
- [Lad] : Géométrie, Ladegaillerie)