161

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 ou 3.

I - Premières propriétés :

<u>Cadre général.</u> Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geq 2$ et de direction l'espace euclidien $(E, \|\ \|)$.

1 - Définitions :

<u>Déf 1</u> : Une isométrie affine de $\mathcal{E}$ est une application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve les distances : si $M, N \in \mathcal{E}$:

$$\boxed{\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|}$$

<u>Exemples</u> : Dans le plan euclidien les rotations, translations, réflexions sont des isométries affines. Une homothétie dont le rapport est de valeur absolue $\neq 1$ n'est pas une isométrie.

<u>Caractérisation des isométries affines</u> :

(i) $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine.

$\Updownarrow$

(ii) f est une application affine et $\vec{f} \in O(E)$.

<u>Prop. 2</u> : Soit $GA(\mathcal{E})$ le groupe des bijections affines alors $Is(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

▷ $\varphi : Is(\mathcal{E}) \to O(E)$ est un morphisme de groupe.
$\quad g \longmapsto \vec{g}$

$Ker(\varphi) = T =$ groupe des translations.

▷ Soit $M \in \mathcal{E}$, et $Is(\mathcal{E}, M) = \{g \in Is(\mathcal{E}), g(M) = M\}$.

Alors : $\varphi_{Is(\mathcal{E},M)} : Is(\mathcal{E}, M) \to O(E)$ est un isomorphisme.

<u>Déf 3</u> : Soit $Is^+(\mathcal{E}) = \{g \in Is(\mathcal{E}), \vec{g} \in SO(E)\}$.
(groupe des déplacements de $\mathcal{E}$)

$Is^-(\mathcal{E}) = \{g \in Is(\mathcal{E}), \vec{g} \in O(E) \setminus SO(E)\}$
(ensemble des antidéplacements)

2 - Étude de $O(E)$:

▷ <u>Réduction dans une base orthonormée</u> :

<u>Thm 4</u> : Si $g \in O(E)$, il existe une b.o.n. β de E et $\theta_1, \dots, \theta_r \not\equiv 0\,[\pi]$ tels que :

$$Mat(g)_\beta = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & & & & 0 \\ & \boxed{-I_q} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{R_{\theta_r}} \end{pmatrix}$$

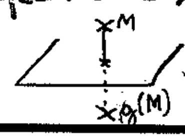
avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

<u>Application 5</u> : • $Is^+(\mathcal{E})$ est connexe par arcs.
• $Is(\mathcal{E})$ a deux composantes connexes : $Is^+(\mathcal{E})$ et $Is^-(\mathcal{E})$.

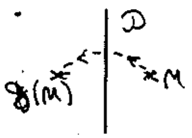
▷ <u>Générateurs de $O(E)$</u> :

<u>Déf 6</u> : • $g \in O(E)$ est une <u>réflexion</u> si $p = n-1$, $q = 1$ et $r = 0$.

• $g \in O(E)$ est un <u>renversement</u> si $p = n-2$, $q = 2$, $r = 0$.



réflexion



renversement

Thm 7: $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Si $g \in O(E)$, alors g est produit d'au plus n réflexions.

Corollaire 8: Un élément $g \in Is(\mathcal{E})$ est engendré par au plus $n+1$ réflexions affines.

Corollaire 9: $SO(3,\mathbb{R})$ est engendré par les renversements.

DVP ((**Application 10**: $SO(3,\mathbb{R})$ est simple.

II – Classification des isométries en dimension 2 et 3 :

1 – Forme réduite d'une isométrie :

Thm 11. Soit f une isométrie affine de $\mathcal{E}$. Il existe un unique couple (g, a) avec $g \in Is(\mathcal{E})$ et $a \in E$ tels que :

(i) $f = g \circ t_a = t_a \circ g$

(ii) l'ensemble $\mathcal{F}$ des pts fixes de g est non vide; a est dans la direction F de $\mathcal{F}$.

Dans ce cas on a : $F = \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id)$

Remarques : a est la projection orthogonale de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_E)$, $\forall M \in \mathcal{E}$.

$\mathcal{F}$ coïncide avec $\{M \in \mathcal{E}, \|\overrightarrow{Mf(M)}\| \text{ minimal}\}$.

2 – En dimension 2 :

	$\dim F = 0$	$\dim F = 1$	$\dim F = 2$
avec point fixe	rotation de centre A d'angle θ	réflexion // à une droite $\mathcal{D}$	Identité
sans point fixe	$\emptyset$	symétrie glissée $= s_{\mathcal{D}} \circ t_a$	translation de vecteur $\vec{u}$

3 – En dimension 3 :

	$\dim F = 0$	$\dim F = 1$	$\dim F = 2$	$\dim F = 3$
avec point fixe	antirotation	rotation par rapport à $\mathcal{D}$	réflexion par rapport à un plan $\mathcal{P}$:	Identité
sans point fixe	$\emptyset$	vissage	composée d'une réflexion et d'une translat°	translation

III - Groupe d'isométrie des polygones / polyèdres réguliers :

Déf 12 : Soit $A \subset \mathcal{E}$. On appelle groupe d'isométrie de A le groupe : $Is(A) = \{g \in Is(\mathcal{E}),\ g(A) = A\}$.

1 - Dimension 2 :

Prop 13, Si P est une partie finie du plan de cardinal n : $|Is^+(P)| \leq n$ et $|Is(P)| \leq 2n$.

$Is(P)$ fixe l'isobarycentre des points de P.

Thm 14 : Si P_n est le polygone régulier à n sommets, alors : $\boxed{Is(P_n) \simeq D_n}$ (groupe diédral d'ordre $2n$).

2 - Dimension 3 :

Si P est un polyèdre régulier, on définit son type comme le couple (p, q) avec p le nb d'arêtes sur chaque face, et q le nb d'arêtes issues d'un sommet.

Thm 15 : Il y a 5 polyèdres réguliers (platoniciens) qui se classent selon leur type :

- le tétraèdre régulier de type $(3,3)$ Δ_4 : $\boxed{Is(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4}$
- le cube C_6 de type $(4,3)$ et son dual l'icosaèdre régulier de type $(3,4)$: Δ_8.

$$\boxed{Is(C_6) = Is(\Delta_8) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$

- l'icosaèdre régulier Δ_{20} de type $(3,5)$ et le dodécaèdre P_{12} de type $(5,3)$: $\boxed{Is(P_{12}) = Is(\Delta_{20}) \simeq \mathfrak{A}_5}$

IV - Pavages du plan affine euclidien :

Soit $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien.

Déf 16 : Soit G un sous-groupe de $Is^+(\mathcal{E})$. On dit que G est un groupe paveur s'il existe P compact connexe de $\mathcal{E}$ d'intérieur non vide tel que :

$$\begin{cases} (i)\ \bigcup_{g \in G} g(P) = \mathcal{E} \\ (ii)\ g(\mathring{P}) \cap h(\mathring{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g(P) = h(P). \end{cases}$$

Thm 17 : Un sous-groupe G de $Is^+(\mathcal{E})$ est paveur si et seulement si il est discret.

DVP

Prop 18 : Soit G un groupe paveur.

(i) $H = \{\vec{u} \in E,\ t_{\vec{u}} \in G\}$ est un réseau de E.

(ii) G/T est fini ($T = \{$translations de $G\}$) et il n'y a qu'un nb. fini de valeurs possibles pour les angles des rotations de G.

→ **Théorème 19 :** À conjugaison près par des éléments de $GL(E)$ il y a 5 types de groupes paveurs.

- De même si l'on étend cette notion avec antidéplacements, c'est-à-dire $G < Is(\mathcal{E})$ alors il y a :

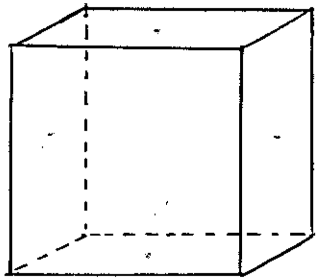
(i) 17 types de groupes paveurs en dimension 2.

(ii) 230 ——— 3.

(iii) 4783 ——— 4.

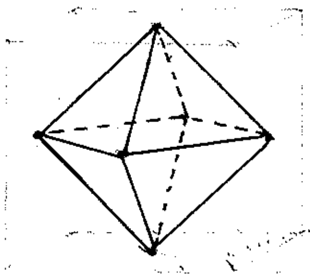
Cube C_6 :

(4,3)



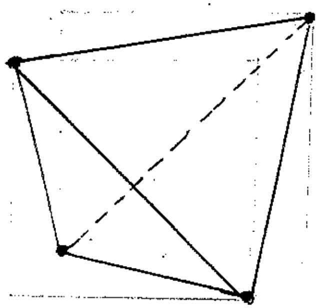
Isocaèdre régulier $\Delta 8$:

(3,4)

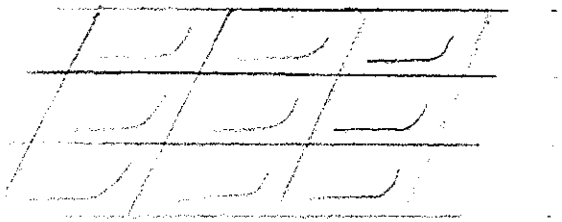


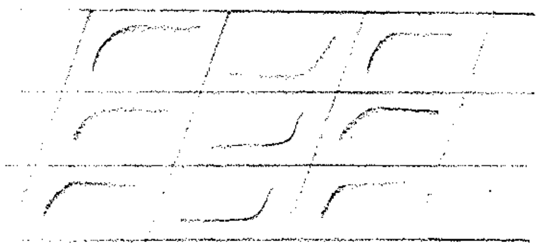
Tétraèdre régulier :

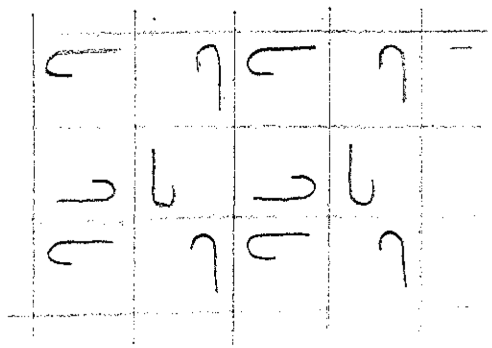
(3,3)



Quelques pavages:







Références :
- Marcel Berger : Géométrie
- Michèle Audin : Géométrie
- Tauvel : Géométrie pour l'agrégation
- Oraux X-ENS : algèbre 3

Développement : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Référence : Oraux X-ENS, Algèbre 3

→ Théorème : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Résultats préliminaires :

1) $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
2) $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements.
3) Les renversements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.
4) $\mathcal{Z}(SO_3(\mathbb{R})) = \{I_n\}$.

→ Soit G un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$, et G_0 la composante connexe de I_n dans G. Alors G_0 est un groupe :

Soient $g_1, g_2 \in G_0$ et $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to G$ chemins continus tq : $\begin{cases} \gamma_1(0) = g_1 \\ \gamma_1(1) = I_n \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma_2(0) = g_2 \\ \gamma_2(1) = I_n \end{cases}$.

Comme $\eta : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g.h^{-1}$ est continue, alors :

$\eta(\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to G$, $t \mapsto \gamma_1(t).\gamma_2^{-1}(t)$ est un chemin continu de G reliant $g_1 g_2^{-1}$ à l'identité.

Donc $g_1 g_2^{-1} \in G_0$.

→ Montrons que si $G \triangleleft SO_3$, alors $G_0 \triangleleft SO_3$:

Soit $g \in SO_3(\mathbb{R})$; $g G_0 g^{-1}$ est une partie de G qui est connexe par arcs (car la conjugaison induit un homéomorphisme) et qui contient I_n, donc $g G_0 g^{-1} \subset G_0$: G_0 est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$

→ **On suppose $G \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$ avec G connexe par arc, et $G \neq \{I_n\}$. Montrer que $G = SO_3(\mathbb{R})$.**

L'application $G \longrightarrow \mathbb{R}$

$g \longmapsto tr(g) = 1 + 2\cos\theta$

est continue car c'est la restriction à G de la forme linéaire $tr : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. ($\theta$ est l'angle de la rotation g).

Ainsi $v : g \mapsto |\theta| = \arccos\left(\frac{tr(g)-1}{2}\right) \in [0,\pi]$ est continue.

Soit g_0 une rotation non triviale de G, on a : $|\theta_0| \in]0,\pi]$, et par continuité de v,

$[0,\theta_0] \subset v(G)$.

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et $g \in G$ tel que : $v(g) = \frac{\pi}{n}$.

Or $g^n \in G$ a un angle π, c'est un renversement.

D'après les résultats préliminaires G contient alors tous les renversements, donc : $G = SO_3$.

→ **Conclusion :** Soit $G \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe propre, et G_0 la composante connexe par arc de G contenant I_n.

D'après ce qui précède $G_0 = \{Id\}$ et de là on en déduit que les composantes connexes par arc de G sont toutes de cardinal 1.

Soit $g_0 \in G$. Comme $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arc, et que $SO_3(\mathbb{R}) \to G$, $h \mapsto h.g_0.h^{-1}$ est continue, alors son image est connexe par arc et contient g_0, donc est égale à g_0.

Bilan : g_0 est dans $\mathcal{Z}(SO_3(\mathbb{R}))$, donc :

$G \subset \mathcal{Z}(SO_3(\mathbb{R})) = \{Id\}$ ☒

Développement : Pavages du plan affine euclidien

Référence : Berger, Géométrie 1, chapitre 1

. Soit E un plan affine euclidien, et $G < Is^+(E)$ sous-groupe des déplacements de E. On dit que G est paveur s'il existe un compact connexe P de E d'intérieur non vide tel que :

$$\begin{cases} (i) \ \bigcup_{g \in G} g(P) = E \\ (ii) \ g(\mathring{P}) \cap h(\mathring{P}) \neq \emptyset \implies g(P) = h(P) \end{cases}$$

Soit $G < Is^+(E)$ un tel groupe paveur.

$\triangleright$ Propriété 1 : Le groupe des translations de G est un réseau, ie que si $H = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ t_{\vec{u}} \in G\}$ alors il existe $(\vec{u_0}, \vec{v_0})$ base de $\vec{E}$ telle que : $H = \mathbb{Z}\vec{u_0} + \mathbb{Z}\vec{v_0}$.

$\rightarrow$ preuve : Soit $\varphi : G \to SO_2(\mathbb{R})$ morphisme de groupe
$$g \longmapsto \vec{g}$$

On a : $\operatorname{Ker}\varphi = T = \{$translations de $G\}$.

On a : $\vec{G} := \varphi(G) \simeq G/T$.

$\triangleright$ Montrons que $T \neq \{0\}$. Supposons φ injective. Alors $G \simeq \varphi(G) \subset SO_2(\mathbb{R})$ qui est abélien, ainsi G est abélien. Comme G ne contient que des rotations (il n'y a pas de translations) et que deux rotations commutent si et seulement si elles ont le même centre, alors G n'est composé que de rotations de même centre, ce qui contredit (i).

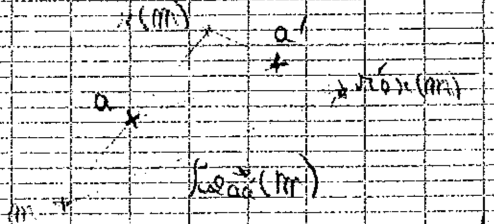
→ <u>Montrons que T contient au moins deux transl. linéairem^t indép.</u>

Supposons que $H \subset \mathbb{R}\vec{u}$, c'est-à-dire que les directions de T sont toutes parallèles.

Comme $T = \operatorname{Ker}(\varphi)$, $T \lhd G$, et si $g \in G$:

$g \circ t_{\vec{u}} \circ g^{-1} = t_{\vec{g}(\vec{u})}$, donc $\forall g \in G$, $\vec{g}(\vec{u}) = \pm\vec{u}$.

Ainsi si $g \in G \setminus T$, g est une symétrie autour d'un point. Or si r et r' sont deux symétries autour de a et a' distincts : $r' \circ r = t_{2\vec{aa'}}$.



donc tous les centres des éléments de $G \setminus T$ doivent être alignés sur une droite D parallèle à $\vec{u}$, donc $\bigcup_g g(P)$ est contenu dans une bande autour de D, ce qui contredit (i).

→ <u>Montrons que H est un réseau :</u>

Nous savons que T contient deux translations linéairement indépendantes.

Soit : $m = \operatorname{Inf}\{\|\vec{v}\|,\ \vec{v} \in H,\ \vec{v} \neq \vec{0}\}$.

Montrons que m est atteint. Soit $(u_n)_{n} \in H$ tel que : $\|u_n\| \to m$. La suite (u_n) est dans un compact donc quitte à extraire on peut supposer $u_n \to v$.

$v_n = u_n - u_{n+1} \in H$ et $v_n \to 0$. Or H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$ (sinon contradiction (ii)), donc v_n est stationnaire à partir d'un certain rang, donc m est atteint. Soit $\vec{u_0} \in H$, $\|\vec{u_0}\| = m$.

. De même $\mathrm{Inf}\{\|\vec v\|,\ \vec v\in \mathbb{R}\vec{u_0},\ \vec v\in H\}$ est atteint en $\vec{v_0}$.

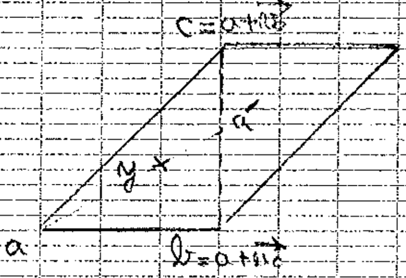
On a : $\mathbb{Z}\vec{u_0}+\mathbb{Z}\vec{v_0}\subset H$.

Soit $a\in E$ et Q le parallélogramme :

$$Q=\{a+t\vec{u_0}+s\vec{v_0},\ t,s\in[0,1]\}$$

Alors les $g(Q)$ remplissent E avec $g\in T$.

Si $H\not\subset \mathbb{Z}\vec{u_0}+\mathbb{Z}\vec{v_0}$, $\exists\, y\in \mathring{Q}$ qui est dans l'orbite de a sous T.



On peut supposer $y\in \widehat{abc}$.

$\|\vec{ay}\|=\|\vec{aa'}\|<\mathrm{Max}\{\|\vec{u_0}\|,\|\vec{v_0}\|\}=\|\vec{v_0}\|$

ce qui contredit le choix de $\vec{v_0}$.

donc $H=\mathbb{Z}\vec{u_0}+\mathbb{Z}\vec{v_0}$.

$$\boxed{\text{Proposition 2 : } \vec G \simeq G/T \text{ est fini, il est composé de rotations dont les angles sont inclus dans } \{0,\pm\tfrac{\pi}{3},\pm\tfrac{2\pi}{3},\pm\tfrac{\pi}{2},\pi\}.}$$

→ preuve : Si $g\in G$, si $\vec u\in H$ alors $\vec g(\vec u)\in H$

donc : $\vec g(\vec{u_0})=p\vec{u_0}+q\vec{v_0}$

$\vec g(\vec{v_0})=p'\vec{u_0}+q'\vec{v_0}$

$$M(\vec g)_{(u_0,v_0)}=\begin{pmatrix}p & p'\\ q & q'\end{pmatrix}$$

On $\vec g^{-1}\in\vec G$ car $\vec g^{-1}=\overrightarrow{g^{-1}}$, $M(\vec g^{-1})=M(\vec g)^{-1}\in M_2(\mathbb{Z})$.

donc $M(\vec g)_{(u_0,v_0)}\in GL_2(\mathbb{Z})\Rightarrow \mathrm{tr}(\vec G)\subset\mathbb{Z}$.

or dans (e_1,e_2) : $M(\vec g)_{(e_1,e_2)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$\mathrm{tr}(\vec g)=2\cos\theta\in\mathbb{Z}$: nb fini de possibilités pour θ.

$\Rightarrow \vec G\simeq G/T$ est fini.