

On se place dans un espace affine (E, E, \odot) où E est un ensemble, E un espace vectoriel euclidien et $\odot: (A, B) \in E^2 \mapsto \overline{AB} \in E$. On note n la dimension de E et donc de E . Si $\varphi: E \rightarrow E$ est une application affine, on note $\vec{\varphi}$ son application linéaire associée.

I - De la définition à une écriture canonique des isométries

1 - Définition et premières propriétés

def 1: [NER p. 259] Soit E un espace affine et φ une application de E dans E . On dit que φ est une isométrie affine (ou tout simplement une isométrie) si $\forall (A, B) \in E^2: \|\varphi(A)\varphi(B)\| = \|AB\|$.

Thm 2: [NER p. 259] Une application de E dans E est une isométrie si et seulement si c'est une application affine dont la partie linéaire est une application orthogonale.

Ex 3: [AUD p. 53] Les translations sont des isométries dont l'application linéaire associée est l'identité. Les homothéties de rapport 1 ou -1 (c'est les translations et les symétries centrales) sont des isométries.

Corollaire 4: [NER p. 260] Une isométrie (affine) est bijective.

Thm 5: [NER p. 260] L'ensemble des isométries de E dans E muni de la composition forme un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$. On le note $Is(E)$.

prop 6: [AUD p. 22] Les translations de E forment un sous-groupe de $Is(E)$ isomorphe à $(E, +)$.

prop/def 7: [NER p. 260] Les isométries dont la partie linéaire est positive forment un sous-groupe de $Is(E)$, noté $Is^+(E) := \{\varphi \in Is(E) \mid \vec{\varphi} \in SO(E)\}$ et appelé groupe des déplacements. L'ensemble $Is^-(E) := Is(E) \setminus Is^+(E)$ est formé des antidéplacements de E .

2 - Écriture canonique d'une isométrie

prop 8: [NER p. 260] Soit $O \in E$. L'ensemble $Is_0(E) := \{\varphi \in Is(E) \mid \varphi(O) = O\}$ des isométries qui fixent O est appelé stabilisateur de O . C'est un sous-groupe de $Is(E)$ et l'application $L: \varphi \in Is_0(E) \mapsto \vec{\varphi} \in O(E)$ est un isomorphisme de groupes.

prop 9: Soit φ une isométrie de E . L'ensemble $Inv(\varphi)$ des points invariants de φ est un sous-espace affine de E de direction $Inv(\vec{\varphi}) = Ker(\vec{\varphi} - id_E)$.

Théorème 10: [NER p. 261] Toute isométrie φ s'écrit de façon unique $\varphi = t_u \circ \psi = \psi \circ t_u$ où $u \in Inv(\vec{\varphi})$ et ψ est une isométrie qui possède au moins un point fixe.

Corollaire 11: [NER p. 262] Si $Inv(\vec{\varphi}) = \{O\}$ alors φ admet un unique point fixe.

Théorème 12: [NER p. 266] Soit (A_0, A_1, \dots, A_n) un repère affine de E . On considère B_0, B_1, \dots, B_n n points de E tels que $\|B_i B_j\| = \|A_i A_j\|$ pour tout i, j . Il existe une unique isométrie transformant A_0, A_1, \dots, A_n en B_0, B_1, \dots, B_n . De plus (B_0, B_1, \dots, B_n) est un repère affine de E .

II - De l'étude du groupe orthogonal à la classification des isométries.

1 - Étude du groupe orthogonal $O(E)$

prop 13: [PER p. 125] Soit $f \in GL(E)$ une symétrie (ou involution) $f^2 = id_E$ alors il existe deux sous-espaces E^+ et E^- qui vérifient: 1) $E = E^+ \oplus E^-$

2) $f|_{E^+} = id_{E^+}$ et $f|_{E^-} = -id_{E^-}$ c'est dans une base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \dots, e_p\} \in E^+$ et $\{e_{p+1}, \dots, e_n\} \in E^-$, $Mat_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

3) De plus $f \in O(E)$ si et seulement si $E^+ \perp E^-$. f est alors appelé symétrie orthogonale.

def 14: [PER p. 125] Une symétrie (orthogonale) dont $\dim E^- = 1$ (resp. 2) est appelée une réflexion (orthogonale) (resp. un renversement (orthogonal)).

Théorème 15: [PER p. 143] [AUD p. 56] Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément $\{ \in O(E) \}$ est produit d'au plus n réflexions.

Corollaire 16: [AUD p. 57] Toute isométrie de E peut s'écrire comme produit d'au plus $n+1$ réflexions.

Théorème 17: [PER p. 143] Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements orthogonaux; précisément, tout élément $f \in SO(E)$ est produit d'au plus n renversements.

Théorème 18: (Réduction des isométries) [PER p. 147] [AUD p. 65] [BOU p. 256] Soit $f \in O(E)$. E est somme directe orthogonale $E = V \oplus W \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_r$, où $n \geq 0$ où V, W, L_i sont des sous-espaces stables par f avec $f|_V = id_V$, $f|_W = -id_W$ et où

$\dim E = 2$ et $f|_E$ est une rotation plane, distincte de $\pm \text{id}_E$. En version matricielle cela donne: Dans une base orthonormée convenable e , on a:

$$\text{claf}_E(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

avec $\theta_i \in [0; 2\pi[$
et $\theta_i \neq 0, \pi$.

2 - Propriétés de $O(E)$

prop 19: [HL62 p. 55] [AUD p. 64] Le groupe $O(E)$ est compact.

prop 20: [HL62 p. 71] [AUD p. 66] Le groupe $SO(E)$ est compact et connexe par arcs.

Corollaire 21: [AUD p. 66] Le groupe $O(E)$ a deux composantes connexes par arcs homéomorphes à $SO(E)$.

proposition 22: [HL62 p. 239] Le groupe $SO(3)$ est simple.

3 - Une représentation de $SO_3(\mathbb{R})$ par les quaternions [NER p. 161-164]

def 23: On note \mathbb{H} le \mathbb{R} algèbre de dimension 4, nommée algèbre des quaternions, munie d'une base $1, i, j, k$ telle que:

(1) 1 est neutre pour la multiplication

(2) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$.

def 30: Soit $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$. On définit le conjugué \bar{q} de q par: $\bar{q} = a - bi - cj - dk$, et la norme $N(q)$ de q par $N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

prop 31: $\forall q \in \mathbb{H}, N(q) \in \mathbb{R}^+$.

prop 32: N est une forme quadratique euclidienne sur \mathbb{H} . La base $(1, i, j, k)$ est orthonormée relativement à N , et la conjugaison est une symétrie orthogonale d'espaces propres \mathbb{R} et $\mathbb{P} = \{bi + cj + dk \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$.

Théorème 33: \mathbb{H} est un corps non-commutatif de centre \mathbb{R} et $N: \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau G le groupe des quaternions de norme 1.

Rem 34: $G \cong \mathbb{S}^3$; en particulier, G est connexe

DEV 1

Thm 35: On a un isomorphisme de groupes $\bar{\cdot}: G / \{1, \pm 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$

Rem 36: Les quaternions fournissent donc un outil algébrique pour représenter les rotations dans l'espace (utilisé en simulation 3D). [HL62]

III - Classification des isométries en dimension 2 et 3.

1 - La dimension $n=2$

def 37: [NER p. 265] On appelle réflexion affine toute composée $\varphi = t_{u, a} \circ \alpha$ d'une réflexion orthogonale et d'une translation.

prop 38: [CON p. 165] Les déplacements du plan euclidien E_2 sont les translations et les rotations autour d'un point. Un déplacement a un point fixe si et seulement si c'est une rotation. Les anti-déplacements sont les symétries orthogonales par rapport à une droite et les symétries glissées. Pour qu'un anti-déplacement ait un point fixe, il faut et il suffit que ce soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Points fixes	\emptyset	droite	point	\emptyset	\emptyset
Nature	identité	réflexion	rotation	réflexion glissée	translation
$Is^+(E)$	+	-	+	-	+
$Is^-(E)$					
forme matricielle de la partie linéaire	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $\theta \neq 0 [2\pi]$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E)$	E	E^+ $\dim(E^+) = 1$	$\{0, e\}$	E^+ $\dim(E^+) = 1$	E

[CON p. 165-166] [NER p. 263-264]

2 - La dimension $n=3$

def 39: [NER p. 264] On appelle rotation affine de E toute application affine de partie linéaire une rotation vectorielle et possédant au moins un point invariant. Si α est une rotation affine distincte de l'identité, l'ensemble $D = \text{Inv}(\alpha)$ est une droite appelée axe de rotation. On note $\alpha = \alpha_D$.

def 40: [NER p. 265] On appelle vissage d'axe D et de vecteur u toute composée $\varphi = t_{u, 0} \circ \alpha_D$ d'une rotation affine d'axe D et d'une translation t_u , où $u \in D$ direction de D .

def 41: [NER p. 266] On appelle rotation symétrique toute composée $\varphi = \alpha_D \circ \sigma_{\mathbb{P}}$ d'une rotation d'axe D et d'un renversement par rapport au plan $\mathbb{P} := D^\perp$.

prop 42: [CON p. 167] Les déplacements de l'espace euclidien E_3 sont les vissages. Les translations et les rotations autour d'un axe en sont des cas particuliers. Pour qu'un déplacement ait des points fixes, il faut et il suffit que ce soit une rotation autour d'un axe ou l'Id $_E$. Les anti-déplacements sont les réflexions, les

réflexions glissées et les rotations-symétries. Pour qu'un anti-déplacement ait un point fixe, il faut et il suffit que ce soit une réflexion. Pour que ce point fixe soit unique, il faut et il suffit que ce soit une rotation-symétrie.

Points fixes	\mathbb{E}	plan	droite	point	\emptyset	\emptyset	\emptyset
Nature	identité	réflexion	rotation-axiale	rotation-symétrie	translation	vissage	réflexion glissée
$Is(\mathbb{E})$ $Is(\mathbb{E})$	+	-	+	-	+	+	-
Forme matricielle de la partie linéaire	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $\theta \neq 0 [2\pi]$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $\theta \neq 0 [2\pi]$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $\theta \neq 0 [2\pi]$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$Is(\mathbb{E})$	E	E^+ $\dim(E^+) = 2$	E^+ $\dim(E^+) = 1$	$\{O_E\}$	E	E^+ $\dim(E^+) = 1$	E^+ $\dim(E^+) = 2$

Exemple 43: [CON p.175] Dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

l'application f définie par
$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \end{cases}$$
 et le

vissage $f = t_u \circ r_{D, \frac{2\pi}{3}}$ où $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle u \rangle$

IV. Isométries conservant une partie

Soit \mathcal{P} une partie de \mathbb{E} , on note $Is(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries de \mathbb{E} laissant \mathcal{P} globalement invariant. $Is(\mathcal{P}) := \{ \varphi \in Is(\mathbb{E}) \mid \varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \}$.

1. Généralités

Théorème 44: [NER p.281] $(Is(\mathcal{P}), \circ)$ est un groupe et $Is^+(\mathcal{P}) := Is(\mathcal{P}) \cap Is^+(\mathbb{E})$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{P})$. Si $\varphi \in Is^-(\mathcal{P}) = Is(\mathcal{P}) \cdot Is^-(\mathbb{E})$, l'application $f \in Is^+(\mathcal{P}) \mapsto \varphi \circ f \in Is^-(\mathcal{P})$ est une bijection.

Théorème 45: [NER p.282] Toute isométrie laissant une partie finie $\mathcal{P} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre O des points A_0, \dots, A_n .

Remarque 46: [NER p.282] 1) Il suffit de trouver l'ensemble $Is^+(\mathcal{P})$ et un anti-déplacement pour connaître $Is(\mathcal{P})$. 2) lorsque \mathcal{P} est fini, les seules isométries qui nous intéressent sont celles qui

fixent l'isobarycentre O de \mathcal{P} .

Exemple 47: [NER p.282] 1) Soit ABC un triangle non isocèle alors $Is(\{A, B, C\}) = \{id_{\mathbb{E}}\}$.

2) Si ABC est un triangle isocèle, non équilatéral, $Is(\{A, B, C\}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

2. Polygones réguliers (dimension 2)

On se place dans un plan affine euclidien, on note P_n le polygone régulier à n sommets A_0, A_1, \dots, A_{n-1} et O son isobarycentre.

Théorème 48: [NER p.292] $Is^+(P_n) = \{id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par la rotation r qui envoie A_k sur A_{k+1} .

Théorème 49: [NER p.292] Il y a exactement n réflexions laissant P_n globalement invariant, ce sont les réflexions par rapport aux n droites (OA_k) ou les médiatrices $A_k A_{k+1}$, $0 \leq k < n$ ($A_n = A_0$).

Théorème 50: [NER p.294] Le groupe $Is(P_n)$ est appelé groupe diédral d'indice n et noté D_n . Il est d'ordre $2n$, engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.

Exemple 51: [NER p.294] $D_3 \cong S_3$.

3. Tétraèdre et cube (dimension 3) [H262 p.362-364]

On se place dans l'espace affine euclidien \mathbb{E}_3 .

Théorème 52: Soit T un tétraèdre régulier de \mathbb{E}_3 , on a:

$$Is(T) \cong S_4 \quad \text{et} \quad Is^+(T) \cong A_4$$

Théorème 53: Soit K un cube de \mathbb{E}_3 , on a:

$$Is^+(K) \cong S_4$$

Application 54: Il y a 57 manières différentes (à déplacement près) de colorier un cube avec 3 couleurs.

Théorème 55: Soit K un cube de \mathbb{E}_3 , on a:

$$Is(K) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Références: F. CONBES Algèbre et géométrie

D.J. NERCIER Cours de géométrie - Préparation au CAPES et à l'agrégation

N. AUDIN Géométrie

J. CALDERO J. GERMONI, Histoire ludique des groupes et de géométries

D. PERRIN Cours d'algèbre

DEV 2

Isomorphisme exceptionnel:

Théorème: Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a un isomorphisme $\bar{\tau}: G/\{\pm 1, \pm i\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$

démonstration:

Rappel: Soit $(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2$, $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$, $N(q_1) = q_1 \overline{q_1}$, $N(q_1 q_2) = N(q_1) N(q_2)$ et $q_1^{-1} = \frac{\overline{q_1}}{N(q_1)}$.

0) \mathbb{H} est non commutatif donc \mathbb{H}^* opère sur \mathbb{H} par automorphismes intérieurs de façon non trivial. On peut se restreindre à l'action de G sur \mathbb{H} , car si $q \in \mathbb{H}^*$, il s'écrit $q = \lambda g$ avec $\lambda = \sqrt{N(q)} \in \mathbb{R}$ et $g \in G$ et comme \mathbb{R} est central dans \mathbb{H} , il ne donne rien dans les automorphismes intérieurs. On pose donc pour $g \in G$:

$$S_g: \begin{cases} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ q' \longmapsto g q' g^{-1} = g q' \overline{g} \end{cases}$$

Nous allons étudier cette action et montrer qu'elle donne une paramétrisation du groupe $SO_3(\mathbb{R})$ par le groupe G .

1) L'application $S_g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est \mathbb{R} -linéaire et vérifie:

$$S_{\overline{g}} \circ S_g(q') = \overline{g} g \overline{q'} \overline{g} \overline{g} = \underbrace{N(g)}_{=1} q' \underbrace{N(g)}_{=1} = q', \quad \forall g \in G, \forall q' \in \mathbb{H}.$$

Donc $S_{\overline{g}} \circ S_g = \text{id}_{\mathbb{H}}$. En identifiant \mathbb{H} à \mathbb{R}^4 , on a l'application:

$$S: \begin{cases} G \longrightarrow GL_4(\mathbb{R}) \\ g \longmapsto S_g \end{cases}$$

2) Montrons que S est un homomorphisme et que $\text{Ker}(S) = \{\pm 1, \pm i\}$:

Soit $(g_1, g_2) \in G^2$, $S_{g_1 g_2}(q') = g_1 g_2 q' \overline{g_1 g_2} = g_1 g_2 q' \overline{g_2} \overline{g_1} = S_{g_1} \circ S_{g_2}(q') \quad \forall q' \in \mathbb{H}$.

Calculons le noyau: Soit $g \in G$ tel que $S_g = \text{id}_{\mathbb{R}^4}$ alors $g q' \overline{g} = q' \quad \forall q' \in \mathbb{H}$ donc $g q' = q' g \quad \forall q' \in \mathbb{H}$. Ainsi $g \in Z(\mathbb{H}) \cap G$, où $Z(\mathbb{H})$ est le centre de \mathbb{H} , c'est-à-dire $g \in \{\pm 1, \pm i\}$.

3) Soit $g \in G$ et $a \in \mathbb{R}$: $S_g(a) = g a g^{-1} = a g g^{-1} = a$ donc $S_g|_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

4) La norme $N(g) = g \overline{g} = \overline{g} g$ est une forme quadratique réelle définie positive sur \mathbb{H} , de forme bilinéaire associée $\langle q, q' \rangle = \frac{1}{2}(q \overline{q'} + q' \overline{q})$. (\mathbb{H}, N) est ainsi un \mathbb{R} -em de dimension 4 et $(1, i, j, k)$ en est une base orthonormée.

Montrons que $S_g \in O(N) \simeq O_4(\mathbb{R}) \quad \forall g \in G$:

Soit $g \in G$ et $q' \in \mathbb{H}$: $N(S_g(q')) = N(g q' \overline{g}) = \underbrace{N(g)}_{=1} N(q') \underbrace{N(\overline{g})}_{=1} = N(q')$

Donc S_g est un élément du groupe orthogonal euclidien défini par N . Ainsi $S: G \rightarrow O_4(\mathbb{R})$.

5) Montrons que \mathbb{L} , l'ensemble des quaternions purs, est stable par $S_q, \forall q \in G$:

.) Pour N, \mathbb{L} est l'orthogonal de \mathbb{R} . En effet $\langle p, a \rangle = 0 \forall p \in \mathbb{L}, a \in \mathbb{R}$ et si $p \in \mathbb{L}$ vérifie $\langle q, a \rangle = 0 \forall a \in \mathbb{R}$ alors $q + \bar{q} = 0$ donc $N(q) = q\bar{q} = -q^2$ et $q^2 \in \mathbb{R}$ ce qui entraîne que $p \in \mathbb{L}$ par caractérisation des quaternions purs.

.) On a montré qu'à $q \in G$ fixé, S_q laisse stable \mathbb{R} , que $S_q \in O(N)$ et que $\mathbb{L} \perp_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ donc S_q laisse \mathbb{L} stable.

On pose alors $s_q = S_q|_{\mathbb{L}}$, on a $s_q \in O(N|_{\mathbb{L}}) \cong O_3(\mathbb{R})$ et :

$$s: \begin{cases} G & \longrightarrow O_3(\mathbb{R}) \\ q & \longmapsto s_q \end{cases} \text{ est un homomorphisme de noyau } \{ \pm 1 \}$$

6) Munissons $O_3(\mathbb{R})$ de sa topologie naturelle obtenue en le considérant comme sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, lui-même identifié à \mathbb{R}^9 . L'application s est alors continue, comme on le voit en calculant la matrice de s_q dans la base i, j, k . En effet, si $q = a + bi + cj + dk$, les coefficients de la matrice sont des polynômes homogènes de degré 2 en a, b, c, d . Par exemple:

$$s_q(i) = q i \bar{q} = (a + bi + cj + dk) i (a + bi + cj + dk) = (a + bi + cj + dk)(a + b - ck + dj)$$
$$= a^2 i + ab - ack + adj - ab + b^2 i + bcj + bdk - ack + bcj - c^2 i - cd + adj + bdk + cd^2$$

D'où $s_{q11} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, $s_{q21} = 2(ad + bc)$, $s_{q31} = 2(bd - ac)$...

Mais, le déterminant, $\det: O_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \{ \pm 1 \}$ est lui aussi une application continue. Or si l'on identifie \mathbb{H} à \mathbb{R}^4 muni de sa topologie naturelle, on voit que G est homéomorphe à S^3 et en particulier connexe.

Donc l'image de G par $\det \circ s$ est connexe, donc un singleton, et comme $s(1) = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, c'est nécessairement $\{ \pm 1 \}$. Autrement dit $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.

7) Montrons enfin que $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$:

Soit $p \in \mathbb{L} \cap G$. On calcule $s_p(p) = p p \bar{p} = p$, donc s_p fixe p et est une rotation d'axe p .

D'autre part, comme $p \in \mathbb{L} \cap G$, on a $\bar{p} = -p$ donc $p^2 = -p\bar{p} = -1$ et $(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, donc s_p est une involution.

s_p est donc le renversement d'axe $\langle p \rangle$. On obtient ainsi tous les renversements de $SO_3(\mathbb{R})$, et comme ils engendrent le groupe, on a bien $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$.

Finalement, d'après le premier théorème d'isomorphisme, on a :

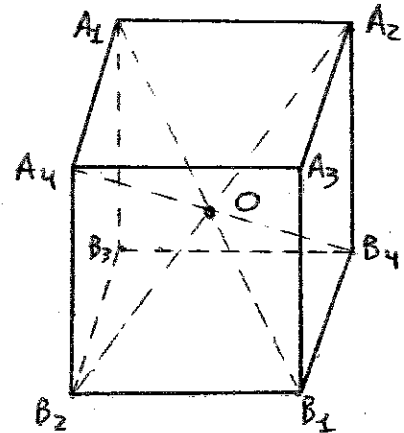
$$G / \{ \pm 1 \} \cong SO_3(\mathbb{R})$$

NOMBRE DE COLORATIONS DU CUBE

[KZGZ, Alessandri, Armstrong]

THÉORÈME: Soit K un cube de $E_3(\mathbb{R})$, espace affine réel de dimension 3. On note I^+ l'ensemble des isométries positives (i.e. déplacements) qui préservent K . Alors: $I^+ \cong \mathcal{S}_4$.

□ Soit $D_i = [A_i B_i]$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des 4 grandes diagonales de K . Ce sont les 4 uniques segments de longueur maximale parmi les segments d'extrémités deux sommets de K , donc ils sont préservés par toute isométrie de I^+ .



Soit $\psi: I^+ \rightarrow \mathcal{S}_0 \cong \mathcal{S}_4$
 $f \mapsto \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ f(D_1) & f(D_2) & f(D_3) & f(D_4) \end{pmatrix}$

On vérifie directement que ψ est un morphisme de groupes.

* Soit $f \in I^+$ tel que $\psi(f) = \text{id}$, soit: $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, f(D_i) = D_i$.

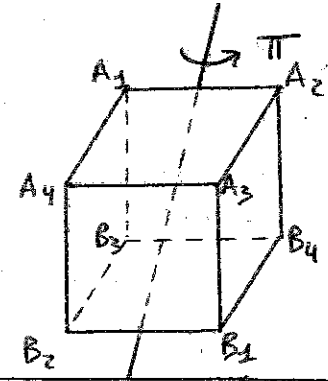
En particulier, $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } f(A_1) = A_1 \text{ et } f(B_1) = B_1 \\ \text{soit } f(A_1) = B_1 \text{ et } f(B_1) = A_1 \end{array} \right.$

Dans le premier cas, on a également $f(A_2) = A_2$ ou $f(A_2) = B_2$; comme f préserve les distances et $A_3 A_2 \neq A_3 B_2$, on a $f(A_2) = A_2$. De même, $f(A_4) = A_4$. Enfin, comme f fixe le repère affine (A_1, A_2, A_4, B_1) , $f = \text{id}$.

Dans le second cas, soit s_0 la symétrie centrale de centre O de centre du cube, i.e. l'isobarycentre de ses sommets. s_0 est une isométrie qui préserve K , et $f \circ s_0$ est une isométrie qui fixe chaque grande diagonale de K ; par le même raisonnement, $f \circ s_0 = \text{id}$, ce qui contredit la positivité de f .

Ainsi, ψ est injective.

* Soit r la rotation d'angle π autour de la droite liant les milieux respectifs des segments $[A_1 A_2]$ et $[B_1 B_2]$.



r inverse 2 à 2 les sommets de K :

$$A_1 \leftrightarrow A_2 ; B_1 \leftrightarrow B_2 ; A_3 \leftrightarrow B_3 ; A_4 \leftrightarrow B_4$$

Comme c est une isométrie qui fixe les sommets de K , $r \in I^+$, et $\psi(r) = (D_1, D_2)$. On obtient de même des antécédents par ψ de toutes les transpositions de S_6 , qui l'engendrent: ψ est surjective.

* Ainsi, ψ est un isomorphisme de groupes, et $I^+ \cong S_4$. \square

APPLICATION: Il existe 57 manières différentes, à isométrie près, de colorier un cube avec 3 couleurs.

\square Soit $\mathcal{F} := \{A, B, C, D, E, F\}$ l'ensemble des faces de K , et $C := \{c_1, \dots, c_m\}$ un ensemble de m éléments distincts nommés couleurs. On nomme coloration du cube K toute application de \mathcal{F} dans C , et $\Phi := C^{\mathcal{F}}$ l'ensemble des colorations de K .

Pour prendre en compte les colorations identiques à déplacement près, on définit la relation d'équivalence R sur Φ par $(\psi R \psi') \Leftrightarrow (\exists g \in I^+, \psi' = \psi \circ g)$.

Enfin, soit $P = \Phi / R$; le nombre de colorations différentes de K à déplacement près est $|P|$.

* I^+ agit sur Φ par $g \cdot \psi = \psi \circ g$; la classe d'équivalence de $\psi \in \Phi$ pour R est alors l'orbite de ψ pour cette action. Par la formule de Burnside:

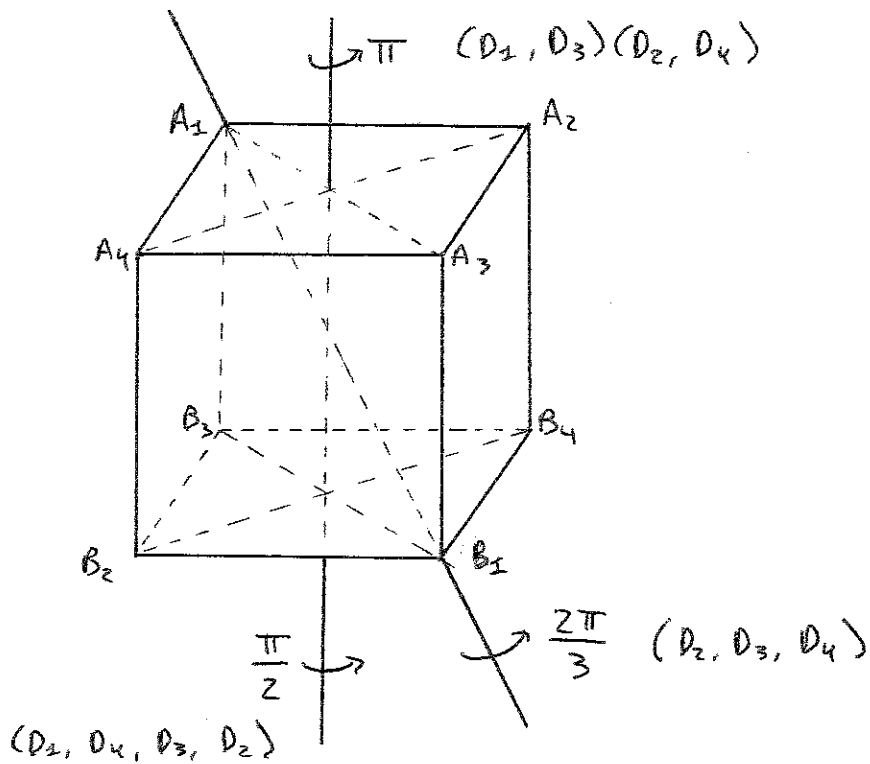
$$|P| = \frac{1}{|I^+|} \sum_{g \in I^+} |\text{Fix}(g)| \quad \text{avec} \quad \text{Fix}(g) = \{\psi \in \Phi \mid g \cdot \psi = \psi\}$$

$|I^+| = |S_4| = 24$; déterminons $|\text{Fix}(g)|$ selon le type de la permutation image de g par ψ .

* $g = \text{id}$: dans ce cas, les m^6 colorations de K sont invariantes par g .

* $\psi(g)$ est une transposition: g est alors une rotation d'angle π autour de la droite passant par les milieux de deux arêtes opposées (cf figure précédente). On a bien 6 déplacements correspondants car 6 paires d'arêtes, et comme chacun inverse les faces 2 à 2, il fixe les m^3 colorations pour lesquelles 2 faces inversées

ont la même couleur: $|\text{Fix}(g)| = m^3$.



* $\psi(g)$ est un 3-cycle: g est une rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ par rapport à une droite reliant deux sommets opposés de k . On a bien 8 tels déplacements, chacun d'entre eux faisant tourner les faces $3 \rightarrow 3$: $|\text{Fix}(g)| = m^2$.

* $\psi(g)$ est une double transposition: g est une rotation d'angle π autour de la droite reliant les centres de 2 faces opposées. Il y en a bien 3, chacune inversant 4 faces $2 \rightarrow 2$ et fixant les 2 autres: $|\text{Fix}(g)| = m^4$.

* $\psi(g)$ est un 4-cycle: g est une rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ autour de la même droite. Il y en a bien 6, et chacune fixe 2 faces et induit un 4-cycle sur les quatre autres faces: $|\text{Fix}(g)| = m^4$.

Par somme: $|P| = \frac{1}{24} (m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2)$.

Enfin, pour $m=3$, on obtient 57 colorations différentes du cube avec 3 couleurs, à déplacement près. \square

[Alessandri] P. Alessandri, "Thèmes de Géométrie" (Dunod)

[Armstrong] P.A. Armstrong, "Groups and Symmetry" (Springer)

[K2G2] LE Caldero-Geronzi! (Calvage & Poinet)

