Leçon 161 : Distances et isométrie d'un espace affine euclidien

I. Application affines et géométrie élémentaire

1. Construction abstraite.

Def 1 : (Espace affine) : Un ensemble E est un espace affine sur un espace affine vectoriel $\vec{E}$ si l'on a une action libre et transitive du groupe additif $\vec{E}$ sur E. L'image de $\vec{E}$ est notée $\mathcal{T}(E)$, c'est le groupe des translations de E. On note $\vec{AB}$ l'unique translation envoyant A sur B.

Def 2 : Applications affines Soit E, F deux espaces affines sur $\vec{E}, \vec{F}$ une application f de E dans F est une applications affine ssi $\exists \vec{f}$ linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ telle que :

$$\forall A, B \in E : \quad f(B) = f(A) + \vec{f}(\vec{AB})$$

Théorème 3 : (Propriété universelle des esp. affines) (Admis) Soit E un esp. affine, il existe un unique espace vectoriel $\hat{E}$ tel que pour toutes application affine f à valeurs dans un espace vectoriel $\vec{F}$, il existe une unique application affine : $\pi : E \to \hat{E}$ telle que f se factorise en une appl. linéaire $\vec{f} : \hat{E} \to \vec{F}$, i.e le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \vec{F} \\ \hat{E} \arrow[ur, "\vec{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ex : ~~Dans~~ les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ax + b$, a, b réels.

Def 4 : (Distance) Soit ϕ un produit scalaire de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle définit $\forall u \in E$, $\|u\| = \phi(u, u)$ la norme du vec. u. et donc soit E un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien on définit la distance entre deux points A et B de E comme suit : $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$.

Def 5 Soient E et F des espaces affines euclidiens, une application affine $\varphi : E \to F$ est une isométrie affine si $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$.
Ce qui équivaut à dire que sa partie linéaire est une isométrie vectorielle.

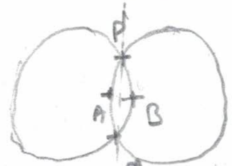
Application 6 : On étudie l'orbite d'un triangle sous l'actions des isométrie cet orbite est constitué des triangles isométrique : deux triangle sont isométrique lorsque les longueurs des leurs cotés sont deux à deux égales.

Théorème 7 : (Décomposition canonique). Une application affine f de E dans E dont la partie linéaire $\vec{f}$ vérifie $E = \ker(\vec{f} - Id_E) \oplus Im(\vec{f} - Id_E)$, se décompose de manière unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ g$ ou $t_{\vec{u}}$ est une translation et g une application affine admettant un point fixe et vérifiant : $t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$.

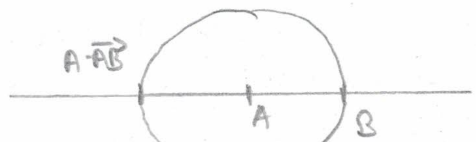
2. Construction des isométries à la règle et au compas

Def 8 : Soit $S \subset \mathcal{P}$, une partie d'un plan affine euclidien.
On pose $S^{(1)}$ l'ens. contenant :
(i) les points de S
(ii) les intersections de droites de S
(iii) " " des cercles de S
(iv) " " des droites et cercles de S.
On définit donc $S^{(0)} = S$ et $S^{(n+1)} = (S^{(n)})^{(1)}$; l'ens des nombres constructibles à partir de S est $C(S) = \bigcup_{n \geq 0} S^{(n)}$.

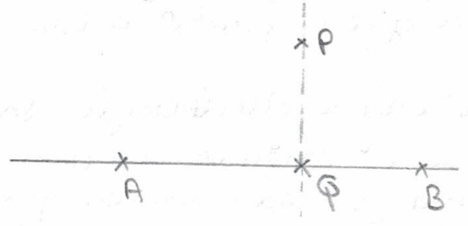
Médiatrice d'un segment. $A, B \in S$, on peut construire la médiatrice de $[A ; B]$:



Symétrique par rapport à un point.
$A, B \in C(S)$ alors $A + \vec{AB} = B \Rightarrow A - \vec{AB} \in C(S)$

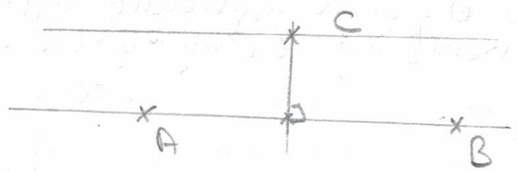


Projection orthogonale, symetrie axiale. $P \in C(S)$, $A, B \in C(S)$ alors le projeté orthogonal de P sur (AB) est constructible ainsi que son symetrique par rap. à (AB).



$\times\ Q + \overrightarrow{PQ} = Q - \overrightarrow{QP}$

Droite parallèle passant par un point.
$A, B, C \in C(S)$, alors la parallèle à (AB) passant par C est dans $C(S)$.



3. Etude de triangles

(**Formule de Héron**): l'aire S d'un triangle quelconque de longueurs de cotés a, b, c est donnée par la formule:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Corollaire: le triangle est plat lorsque p est egal à la longueur d'un des cotés.

Lemme (Viviani) Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point interieur au triangle aux trois cotés est egale à la hauteur. Dev 1

Théorème: (Points de Fermat) Soit un triangle ABC donné, il existe un unique point I interieur au triangle tel que si tout les angles du triangles sont inferieurs à $120°$ $(2\pi/3)$, ~~alors~~ I minimise la quantité $AI + BI + CI$.

II. Application des distance à la matrice de Graam.

Soit E un espace prehilbertien reel, si $x_1, \dots, x_m$ sont m vecteurs de E, la matrice de Gram associée est la matrice symetrique de terme general $\langle x_i | x_j \rangle$. le det. de ~~Graam~~. Gram est le determinant de cette matrice.

Soit. $G(x_1, \dots, x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1 | x_m \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & & \\ \vdots & & \\ \langle x_n | x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$

Propriete Soit $F \subset E$, $(x_1 .. x_m) \in F$ une base ; $x \in E$, Alors soit $p : E \to F$ est la projection orthogonale.
$G(x, x_1 .., x_m) = \|x - p(x)\|^2 \, G(x_1 .. x_m)$.

Propriété: Soit F un sous espace vectoriel de dim finie m de E muni d'une base $(x_1 .. x_m)$ et $x \in F$.
On pose $x = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$. Alors $\forall j \in \{1, .., m\}$ on a la relation
$p_j^2 \, G(x_1 .. x_m) = G(x_1 .. x_{j-1}, x, x_{j+1} .. x_m)$.

Moindre carrés Le probleme $Ax = b$ admet une solution exacte ssi $b \in \mathrm{Im}(A)$.
Si $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, $(A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ on veut minimiser $\|Ax - b\|$.
On sait que $\|Ax - b\|_2$ est de minimum $\sqrt{\dfrac{G(b, A)}{\det({}^tAA)}}$
On veut annuler le gradient de ${}^t(Ax-b)(Ax-b) = \|Ax\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle Ax, b \rangle$

$\langle \nabla, h \rangle = 2\langle Ah, Ax \rangle - 2\langle Ah, b \rangle = \langle 2({}^tAAx - {}^tAb), h \rangle$

On veut alors x tel que ${}^tAAx = {}^tAb$ ie: $x = ({}^tAA)^{-1}\, {}^tAb$.

III. Classification des isométries en dimension 2 et 3 :

1) Réduction du problème

Théorème : Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(E)$, il existe un unique couple $(\vec{v}, \psi) \in \vec{E} \times \mathrm{Isom}(E)$:

* ψ admet des points fixes F.
* $\vec{v} \in \vec{F}$
* $\varphi = \psi + \vec{v}$.
* ψ et $\vec{v}$ commutent,

Théorème : On a un homéomorphisme $\mathrm{Isom}^+(E) \to O^+(\vec{E}) \times \vec{E}$

Classification de $\mathrm{Isom}^+(E)$, $\dim E = 2$: Soit $A \in O^+(\vec{E})$ alors A est conjuguée à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

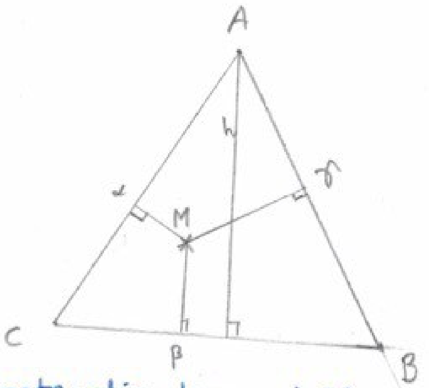
Classification de $\mathrm{Isom}^+(E)$, $\dim E = 3$: Soit $A \in O^+(E)$, alors A est conjuguée à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

2) Application :

Théorème : $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Théorème : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. DEV II.

Prop : $O_n(\mathbb{R})$ est compact et a deux composantes connexes homéomorphes



Construction Lemme de Viviani.